הסקה אוטומטית ושימושיה -- דף נוסחאות

- המחלקה למדעי המחשב
- מרצה: ד"ר יוני זוהר

1 שיטת צייטין

תהי נוסחה A. ניצור נוסחה B כדלהלן:
עבור כל תת נוסחה C של A נגדיר משתנה חדש p_C. נגדיר את B להיות הנוסחה $p_A \wedge \bigwedge_{C \in sub(A)} E(C)$, כאשר $sub(A)$ היא קבוצת תתי הנוסחאות של A ו- $E(C)$ מוגדרת כך:

$$E(C) = \begin{cases} CNF(p_C \leftrightarrow C) & C \text{ } is \text{ } variable \\ CNF(p_C \leftrightarrow true) & C \text{ } is \text{ } true \\ CNF(p_C \leftrightarrow false) & C \text{ } is \text{ } false \\ CNF(p_C \leftrightarrow \neg p_D) & C = \neg D \\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1} \wedge p_{C_2})) & C = C_1 \wedge C_2 \\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1} \vee p_{C_2})) & C = C_1 \vee C_2 \\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1} \rightarrow p_{C_2})) & C = C_1 \rightarrow C_2 \\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1} \leftrightarrow p_{C_2})) & C = C_1 \leftrightarrow C_2 \end{cases}$$

$$CNF(p \leftrightarrow C) = \begin{cases} (\neg p_C \vee C) \wedge (\neg C \vee p_C) & C \text{ } is \text{ } variable \\ (\neg p_C \vee true) \wedge (false \vee p_C) & C \text{ } is \text{ } true \\ (\neg p_C \vee false) \wedge (true \vee p_C) & C \text{ } is \text{ } false \\ (\neg p_C \vee \neg p_D) \wedge (p_D \vee p_C) & C \text{ } is \text{ } \neg D \\ (\neg p_C \vee p_{C_1}) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2} \vee p_C) & C \text{ } is \text{ } C_1 \wedge C_2 \\ (\neg p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_{C_1} \vee p_C) \wedge (\neg p_{C_2} \vee p_C) & C \text{ } is \text{ } C_1 \vee C_2 \\ (\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (p_{C_1} \vee p_C) \wedge (\neg p_{C_2} \vee p_C) & C \text{ } is \text{ } C_1 \rightarrow C_2 \\ (\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_1} \vee \neg p_{C_2}) \wedge & C \text{ } is \text{ } C_1 \leftrightarrow C_2 \\ (p_C \vee \neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2}) \wedge (p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2}) & \end{cases}$$

2 תחשיבים

1. תחשיב $DPLL$:

   (א) כלל $Decide$: $\dfrac{(M,F,D)}{(M :: \ell, F, D \cup \{\ell\})}$ כאשר $var(\ell)$ מופיע ב-F אך $var(\ell)$ לא מוגדר ב-v_M.

   (ב) כלל $Fail$: $\dfrac{(M,F,D)}{Fail}$ כאשר $D = \emptyset$ ויש פסוקית C ב-F כך ש- $v_M \models \neg C$.

   (ג) כלל BT : $\dfrac{(M :: \ell :: N, F, D)}{(M :: \overline{\ell}, F, D \setminus \{\ell\})}$ כאשר $\ell \in D$, ויש פסוקית C ב-F כך ש- $v_{M::\ell::N} \models \neg C$ ו-$N \cap D = \emptyset$.

   (ד) כלל UP: $\dfrac{(M,F,D)}{(M :: \ell, F, D)}$ כאשר יש C כך ש-$C \vee \ell$ היא פסוקית ב-F, $var(\ell)$ לא מוגדר ב-v_M ו-$v_M \models \neg C$.

2. תחשיב CC:

(א) כלל $Top-Level$: $\frac{(M,F)}{(M\setminus\{X,Y\}\cup\{X\cup Y\},F)}$ אם $X,Y\in M$ ויש שמות עצם $t\in X$, $s\in Y$ כך ש-$t=s\in F$.

(ב) כלל $Congruence$: $\frac{(M,F)}{(M\setminus\{X,Y\}\cup\{X\cup Y\},F)}$ אם $X,Y\in M$ וקיימים סימן פונקציה f, קבוצה $Z\in M$, ומשתנים $z,z'\in Z$ כך ש- $f(z)\in X$ ו-$f(z')\in Y$.

(ג) כלל $Fail$: $\frac{(M,F)}{Fail}$ אם יש $X\in M$ ו-$t_1,t_2\in X$ כך ש-$t_1\neq t_2\in F$.

3. תחשיב $DPLL(UF)$ מתקבל מ-$DPLL$ על ידי הוספת כלל ההיסק הבא:

   (א) כלל UF: $\frac{(M,F,D)}{([],F\wedge\overline{\varphi_M},\emptyset)}$ כאשר:

      i. (M,F,D) רוויה ביחס $DPLL$
      ii. $tr^{-1}(\varphi_M)$ אינה ספיקה על ידי אף Σ-מבנה
      iii. tr היא פונקציה חח"ע ועל מנוסחאות בלוגיקה מסדר ראשון לנוסחאות פסוקיות.
      iv. אם $M=[\ell_1\dots\ell_n]$ אז $\varphi_M=\ell_1\wedge\dots\wedge\ell_n$ ו-$\overline{\varphi_M}=\overline{\ell_1}\vee\dots\vee\overline{\ell_n}$.

3 סיגנטורות

1. Σ_{LA} היא הסיגנטורה $(F_{\Sigma_{LA}},P_{\Sigma_{LA}},a_{\Sigma_{LA}})$ כך ש:

   (א) $F_{\Sigma_{LA}}=\{+,-,0,1\}$

   (ב) $P_{\Sigma_{LA}}=\{\geq\}$

   (ג) $a_{\Sigma_{LA}}(+)=2,a_{\Sigma_{LA}}(-)=1,a_{\Sigma_{LA}}(0)=0,a_{\Sigma_{LA}}(1)=0,a_{\Sigma_{LA}}(\geq)=2$

2. Σ_A היא הסיגנטורה $(S_{\Sigma_A},F_{\Sigma_A},P_{\Sigma_A},a_{\Sigma_A})$ בה $S_{\Sigma_A}=\{A,I,E\}$, $F_{\Sigma_A}=\{r,w\}$, $P_{\Sigma_A}=\emptyset$ ו-$a_{\Sigma_A}(r)=(A,I,E)$, $a_{\Sigma_A}(w)=(A,I,E,A)$.

4 ספיקות

1. מבנה Σ_{LA} v נקרא מבנה LRA אם:

   (א) $D_v=\mathbb{R}$

   (ב) כל הסימנים מפורשים כצפוי

2. מבנה Σ_{LA} v נקרא מבנה LIA אם:

   (א) $D_v=\mathbb{Z}$

   (ב) כל הסימנים מפורשים כצפוי

3. Σ_A-מבנה v נקרא מבנה A אם v מספק את הנוסחאות הבאות:

$$\begin{array}{ll} row1 & \forall a\forall e\forall i.r(w(a,i,e),i)=e \\ row2 & \forall a\forall e\forall i\forall j.i\neq j\to r(w(a,i,e),j)=r(a,j) \\ ext & \forall a\forall a'.a\neq a'\to\exists i.r(a,i)\neq r(a',i) \end{array}$$

   כאשר a,a' הם משתנים מסוג A, i,j משתנים מסוג I ו-e משתנה מסוג E.

4. נוסחה נקראת "ספיקה" אם יש מבנה כלשהו שמספק אותה. עבור $X\in\{LIA,LRA,A\}$: נוסחה נקראת "X-ספיקה" אם יש "מבנה X" שמספק אותה.