הוכחה שב־$DPLL$ אין גזירות אינסופיות

27 במרץ 2022

הגדרה 1.0 עבור ליטרל ℓ, $var(\ell)$ הוא המשתנה שמופיע ב־ℓ.

הגדרה 2.0 $vars(C) = \{var(\ell) \mid \ell \in C\}$ ו־$vars(F) = \bigcup_{C\in F} var(C)$.

למה 3.0 אם (M, F, D) קונפיגורציה שגזירה מ־$([], F, \emptyset)$ אז $dom(v_M) \subseteq vars(F)$.

הוכחה: נניח כי $x \in dom(v_M)$, נוכיח כי $x \in vars(F)$ באינדוקציה על אורך הגזירה של (M, F, D) מ־$([], F, \emptyset)$. במקרה הבסיס פשוט $x \notin dom(v_M) = \emptyset$. נניח את הטענה לגזירות באורך n ונוכיח לגזירות באורך $n + 1$. נחלק למקרים לפי הצעד האחרון בגזירה. נשים לב שבכל אחד מכללי ההיסק האפשריים, הליטרל שמתווסף ל־M מכיל משתנה שמופיע ב־F. המקרה היחיד הלא טריוויאלי הוא BT: במקרה זה, הקונפיגורציה היא $(M :: \bar{\ell}, F, D \setminus \{\ell\})$ והקונפיגורציה שקדמה לה היא $(M :: \ell :: N, F, D)$. לקונפיגורציה שקדמה לה יש גזירה קצרה יותר ולכן לפי הנחת האינדוקציה כל מה שמופיע בהשמה שלה מכיל משתנה מ־F, כולל ℓ. ∎

למה 4.0 אם אם (M, F, D) קונפיגורציה שגזירה מ־$([], F, \emptyset)$ אז אין משתנה שמופיע פעמיים ב־M.

הוכחה: באינדוקציה על אורך הגזירה של (M, F, D). במקרה הבסיס אין ליטרלים בכלל. נניח נכונות לגזירות באורך $n - 1$ ונניח שהגזירה של (M, F, D) היא באורך n. נחלק למקרים לפי הכלל האחרון בגזירה. המקרה המעניין היחיד הוא BT. תהי (M', F', D') הקונפיגורציה ה־$n-1$ בגזירה. אז $M' = M_0 :: \ell :: N$ ו־$M = M_0 :: \bar{\ell}$. לפי הנחת האינדוקציה $var(\ell)$ לא מופיע פעמיים ב־M' ולכן הוא לא מופיע בכלל ב־M_0. לכן הוא מופיע פעם אחת ב־$M_0 :: \bar{\ell}$. לגבי משתנים אחרים, הם לא מופיעים פעמיים ב־M_0 פשוט לפי הנחת האינדוקציה. ∎

למה 5.0 אין גזירה אינסופית.

הוכחה: לכל רשימה M של ליטרלים, נגדיר $m(M)$ להיות מספר המשתנים שמופיעים ב־F אך אינם מוגדרים ב־v_M. לכל קונפיגורציה (M, F, D), יהיו $M_0, M_1, \ldots M_n$ ו־$\ell_1, \ldots, \ell_n$ כך ש $D = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$, לכל $0 \le i \le n$ מתקיים $M_i \cap D = \emptyset$ ו־$M = M_0\ell_1M_1 \ldots \ell_nM_n$. נגדיר $m(M, F, D)$ להיות $((m_0, \ldots, m_n), m_*)$ כך שלכל $0 \le i \le n$, $m_i = m(M_i)$ ו־ $m_* = m(M)$. בנוסף נגדיר $m(Fail) = (-1)$. לכל שתי רשימות $a = ((m_0, \ldots, m_n), m_*)$ ו־ $a' = ((m'_0, \ldots m'_{n'}), m'_*)$, נגדיר $a' < a$ אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. יש $0 \le i \le n, n'$ כך שלכל $0 \le j < i$ מתקיים $m_j = m'_j$ ו־$m'_i < m_i$ (הסדרות מזדהות עד למקום מסויים $i - 1$ ומיד אחריו האיבר נהיה קטן יותר)
2. לכל $0 \le i \le n$ מתקיים $m_i = m'_i$, ו־$m'_* < m_*$ (הסדרה הראשונה היא תחילית של הסדרה השניה אבל $m'_* < m_*$).

נשים לב שהאורך של הרשימות (n, n') הללו חסום על ידי מספר המשתנים ב־F משתי הלמות הקודמות. לכן אין סדרה אינסופית יורדת של רשימות כאלו. נותר להוכיח שאם ניתן לקבל קונפיגורציה (M', F', D') מקונפיגורציה (M, F, D) על ידי אחד מכללי ההיסק, אז $m(M', F', D') < m(M, F, D)$. אם נוכיח את זה, נקבל לכל גזירה סדרה יורדת לפי $<$, והיא לא יכולה להיות אינסופית. נעבור כלל כלל:

1. הכלל $Decide$ מוסיף ליטרל בחירה לרשימה. אז הרשימה הקודמת היא תת רשימה של הנוכחית, אבל מספר המשתנים הלא מוגדרים הכולל קטן. מתאים למקרה השני.
2. הכלל $Fail$ מביא אותנו למינימום – -1 הוא מינימאלי לפי המקרה הראשון – הסדרות מזדהות על 0 מקומות והאיבר הראשון נהיה קטן יותר.
3. הכלל UP מוסיף ליטרל שאינו בחירה לרשימה. אז הכל אותו דבר חוץ מהאיבר האחרון ברשימה שמייצג את ה M_i האחרון שעכשיו יש בו פחות משתנים לא מוגדרים. מתאים למקרה הראשון.
4. הכלל BT משאיר את כל הרשימות אותו דבר עד המקום ה־i ל־i כלשהו, בו יש פחות משתנים לא מוגדרים. מתאים למקרה הראשון.

∎