הסקה אוטומטית ושימושיה -- דף נוסחאות

- המחלקה למדעי המחשב
- מרצה: ד"ר יוני זוהר

1. שיטת צייטין:
תהי נוסחה A. ניצור נוסחה B כדלהלן:
עבור כל תת נוסחה C של A שאינה משתנה נגדיר משתנה חדש p_C. נגדיר את B להיות הנוסחה $E(C)$ $p_A \wedge \bigwedge_{C \in sub(A)}$,
כאשר $sub(A)$ היא קבוצת תתי הנוסחאות של A ו- $E(C)$ מוגדרת כך:

$$E(C) = \begin{cases} CNF(p_C \leftrightarrow C) & C \text{ is variable} \\ CNF(p_C \leftrightarrow true) & C \text{ is } true \\ CNF(p_C \leftrightarrow false) & C \text{ is } false \\ CNF(p_C \leftrightarrow \neg p_D) & C = \neg D \\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1} \wedge p_{C_2})) & C = C_1 \wedge C_2 \\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1} \vee p_{C_2})) & C = C_1 \vee C_2 \\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1} \rightarrow p_{C_2})) & C = C_1 \rightarrow C_2 \\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1} \leftrightarrow p_{C_2})) & C = C_1 \leftrightarrow C_2 \end{cases}$$

$$CNF(p \leftrightarrow C) = \begin{cases} (\neg p_C \vee C) \wedge (\neg C \vee p_C) & C \text{ is variable} \\ (\neg p_C \vee true) \wedge (false \vee p_C) & C \text{ is } true \\ (\neg p_C \vee false) \wedge (true \vee p_C) & C \text{ is } false \\ (\neg p_C \vee \neg P_D) \wedge (p_D \vee p_C) & C \text{ is } \neg D \\ (\neg p_C \vee p_{C_1}) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2} \vee p_C) & C \text{ is } C_1 \wedge C_2 \\ (\neg p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_{C_1} \vee p_C) \wedge (\neg p_{C_2} \vee p_C) & C \text{ is } C_1 \vee C_2 \\ (\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (p_{C_1} \vee p_C) \wedge (\neg p_{C_2} \vee p_C) & C \text{ is } C_1 \rightarrow C_2 \\ (\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_1} \vee \neg p_{C_2}) \wedge & C \text{ is } C_1 \leftrightarrow C_2 \\ (p_C \vee \neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2}) \wedge (p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2}) & \end{cases}$$

2. נוסחאות שטוחות: תהי Σ סיגנטורה. ליטרל ℓ ב-Σ נקרא שטוח אם הוא באחת מהצורות הבאות:
   (א) $x = y$ עבור משתנים x, y
   (ב) $\neg(x = y)$ עבור משתנים x, y (לרוב מסמנים ב-$x \neq y$)
   (ג) $x = f(x_1, \ldots, x_n)$ עבור משתנים $x, x_1, \ldots, x_n$ ו-$f \in F_\Sigma$ עם $a_\Sigma(f) = n$.
   (ד) $P(x_1, \ldots, x_n)$ עבור משתנים $x_1, \ldots, x_n$ ו-$P \in P_\Sigma$ עם $a_\Sigma(f) = n$.
   (ה) $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ עבור משתנים $x_1, \ldots, x_n$ ו-$P \in P_\Sigma$ עם $a_\Sigma(f) = n$.

3. שיטוח קוביות:
   (א) $\dfrac{s = t \in \varphi}{X \setminus \{s = t\} \cup \{x_s = t, x_s = s\}}$ אם s אינו משתנה
   (ב) $\dfrac{s \neq t \in \varphi}{X \setminus \{s \neq t\} \cup \{x_s \neq t, x_s = s\}}$ אם s אינו משתנה

(ג) $\dfrac{x \neq t \in \varphi}{X \setminus \{x \neq t\} \cup \{x \neq x_t, x_t = t\}}$ אם t אינו משתנה

(ד) $\dfrac{x = f(s_1, \ldots, s_n) \in \varphi}{X \setminus \{x = f(s_1, \ldots, s_n)\} \cup \{x = f(s_1, \ldots, s_{i-1}, x_{s_i}, s_{i+1}, \ldots, s_n), x_{s_i} = s_i\}}$ אם יש s_i שאינו משתנה

(ה) $\dfrac{P(s_1, \ldots, s_n) \in \varphi}{X \setminus \{P(s_1, \ldots, s_n)\} \cup \{P(s_1, \ldots, s_{i-1}, x_{s_i}, s_{i+1}, \ldots, s_n), x_{s_i} = s_i\}}$ אם יש s_i שאינו משתנה

(ו) $\dfrac{\neg P(s_1, \ldots, s_n) \in \varphi}{X \setminus \{\neg P(s_1, \ldots, s_n)\} \cup \{\neg P(s_1, \ldots, s_{i-1}, x_{s_i}, s_{i+1}, \ldots, s_n), x_{s_i} = s_i\}}$ אם יש s_i שאינו משתנה

4. אלגוריתם $DPLL$:

(א) קונפיגורציה (M, F, D) מורכבת מרשימת ליטרלים M, נוסחת CNF F, וקבוצת ליטרלים D.

(ב) כלל $Decide$: $\dfrac{(M, F, D)}{(M :: \ell, F, D \cup \{\ell\})}$ כאשר $var(\ell)$ מופיע ב-F אך $var(\ell)$ לא מוגדר ב-v_M.

(ג) כלל $Fail$: $\dfrac{(M, F, D)}{Fail}$ כאשר $D = \emptyset$ ויש פסוקית C ב-F כך ש- $v_M \models \neg C$.

(ד) כלל $BackTrack\ BT$: $\dfrac{(M :: \ell :: N, F, D)}{(M :: \overline{\ell}, F, D \setminus \{\ell\})}$ כאשר $\ell \in D$, $v_{M::\ell::N} \models \neg C$ ו-$N \cap D = \emptyset$.

(ה) כלל $UP\ UnitPropagate$: $\dfrac{(M, F, D)}{(M :: \ell, F, D)}$ כאשר יש C כך ש-$C \vee \ell$ היא פסוקית ב-F, $var(\ell)$ לא מוגדר ב-v_M ו-$v_M \models \neg C$.

5. אלגוריתם CC:

(א) קונפיגורציה (M, F) מורכבת מקוביה שטוחה F ו-M היא קבוצה של קבוצות של שמות עצם שמופיעים ב-F.

(ב) כלל $Top - Level$: $\dfrac{(M, F)}{(M \setminus \{X, Y\} \cup \{X \cup Y\}, F)}$ אם $X, Y \in M$ ויש שמות עצם $t \in X$, $s \in Y$ כך ש-$t = s \in F$.

(ג) כלל $Congruence$: $\dfrac{(M, F)}{(M \setminus \{X, Y\} \cup \{X \cup Y\}, F)}$ אם $X, Y \in M$ וקיימים סימן פונקציה f, קבוצה $Z \in M$, ומשתנים $z, z' \in Z$ כך ש- $f(z) \in X$ ו-$f(z') \in Y$.

(ד) כלל $Fail$: $\dfrac{(M, F)}{Fail}$ אם יש $X \in M$ ו-$t_1, t_2 \in X$ כך ש-$t_1 \neq t_2 \in F$.

6. אלגוריתם $DPLL(UF)$ מתקבל מ-$DPLL$ על ידי הוספת כלל ההיסק הבא:

(א) כלל UF: $\dfrac{(M, F, D)}{([], F \wedge \overline{\varphi_M}, \emptyset)}$ כאשר (M, F, D) רוויה ביחס ליתר הכללים והקוביה $tr^{-1}(\varphi_M)$ אינה ספיקה על ידי אף Σ-מבנה כך ש-tr היא פונקציה חח"ע ועל מנוסחאות בלוגיקה מסדר ראשון לנוסחאות פסוקיות.