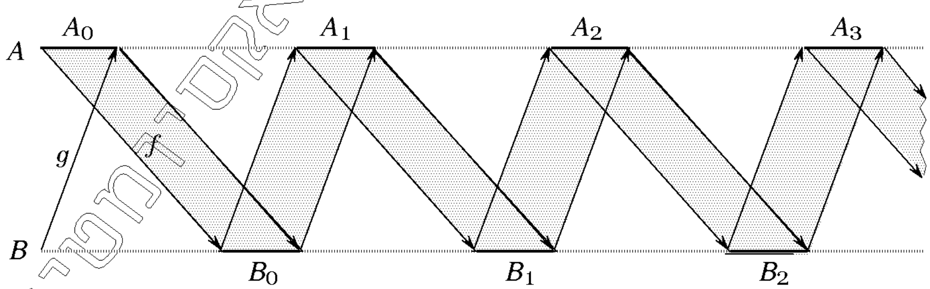
בס"ד

$V = \{A : \neg A \in A\}$

החלום של קנטור

קורס ראשון בתורת הקבוצות האקסיומטית

$2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$



לימוד אינטראקטיבי ותירגול

מהדורה שלישית: תשס"ג

בועז צבאן, המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב, אוניברסיטת בר-אילן

מבוא

חוברת זאת נועדה לשמש את הקורס השני בנושא מבוא לתורת הקבוצות ולאנליזה. נושא הלוגיקה הפסוקית הוא דרישה מוקדמת לקורס (למשל, מספיק להכיר את הקשרים הלוגיים). כמו כן, אנו מניחים שלתלמידים יש הכרות בסיסית עם המושג האינטואיטיבי של "קבוצה", ושהם תירגלו היטב את המושגים האלמנטריים של שייכות, הכלה, איחוד, חיתוך, פונקציות וכדומה (המתבונן בחוברת יגלה שהחוברת מכילה למעשה את כל הדרוש כדי ללמוד את הנושא מתוכה, אולם רושם זה מטעה, כיון שאיננו מתעכבים על הנושאים האלמנטריים, אלא רק מציגים אותם ו"רצים" הלאה. בכל אופן, במקרים – הנדירים – של תלמידים שלומדים את הקורס הזה לפני שלמדו את הקורס המקדים, חוברת זו יחד עם קצת מוטיבציה צריכים להספיק).

מטרת קורס זה היא לכסות את הנושא בצורה פורמאלית יותר, ולשמש טרקלין מבוא למתמטיקה הגבוהה יותר של תחום זה (כגון: אנליזה של הישר הממשי, הוכחות אי-תלות וכו'). למרבה הצער, הזמן המוקצה לקורס יספיק ללמד רק את הטכניקות (שימוש בסיסי באקסיומות, חשבון סודרים ומונים ואינדוקציה טרנספיניטית, וגרסאות של אקסיומת הבחירה), ולא נותר זמן רב ליישומים, מה שעלול להותיר את התלמיד עם תחושה שלמד חומר שאין לו יישום. כדאי לנצל את השיעור האחרון של הקורס כדי לתאר, בקוים כלליים, יישום או שניים של מה שלמדנו. הצעה לכך מובאת בפרק על משפט Cantor–Bendixon.

בנספח לחוברת מתוארת בניה פורמאלית של הישר הממשי והמישור המרוכב. מטרת הנספח היא להטעים את התלמיד טעמו של דיוק מתימטי, ולהמחיש את העובדה שכל המתמטיקה ה"קונבנציונאלית" נובעת מהאקסיומות של תורת הקבוצות. במהלך החוברת, אנו נניח היכרות בסיסית של התלמיד עם הישר הממשי (כיון שהנספח אינו מכוסה בקורס הסטנדרטי, שתלנו חלק מהתרגילים האופייניים בנספח גם בתוך החוברת).

השתדלנו לתת הדרכות מלאות ככל האפשר לתרגילים (לתלמידים מתקדמים זה יראה כאילו פתרנו חלק מהתרגילים לגמרי), פירקנו תרגילים קשים למספר תרגילים קלים יותר, והוספנו קטעי קישור על פי טעמנו האישי.

החוברת פותחת בפרק מבוא שנועד לתת מוטיבציה לאקסיומטיזציה של תורת הקבוצות, וכן לתאר בצורה חלקית, לפחות, את השפה המתמטית של תורת הקבוצות (הסיבה להכללת פרק זה היא, שהתלמידים לא נותנים "לסדר" אותם עם הגדרות אמורפיות של המושג "תכונה/נוסחה" שנדרש לשתיים מהאקסיומות). פרק זה יש ללמד בסקירת על בלבד, ולציין שהמעוניין להרחיב ידיעותיו בנושא יקרא את הפירוט בחוברת.

בסוף החוברת הוספנו "בנק" שאלות מבחינות ישנות. יש שתי סיבות לכך שלא פיזרנו את השאלות בתוך החוברת. האחת, שלעתים דרושות הגדרות הפרושות על פני כל החוברת כדי להבין שאלה מסויימת. הסיבה השניה היא, שבזמן המצומצם של הקורס לא תמיד יש אפשרות להתעכב בכל נושא על שאלות נוספות, מעבר למה שכבר כלול בפרקים. התלמיד יכול לפתור את השאלות מהבחינות בזמנו הפנוי (אני יודע, אין כזה ...), או לפני הבחינה. באופן כללי, צריך להקפיד מאד שלא לטבוע בנושא ספציפי על חשבון הזנחת נושאים אחרים. סטודנט המעוניין בכך יוכל להשלים ידיעותיו באמצעות החוברת וספרים אחרים.

הערות לתלמידים. 1. התרגילים כתובים בסדר כזה, שכמעט כל תרגיל מסתמך על תרגיל שקדם לו (*לעתים, התרגיל מסתמך על מספר תרגילים שקדמו לו*). לעתים קשה מאד לפתור תרגיל מבלי לפתור, או לפחות לקרוא, את התרגילים שקדמו לו. לתשומת לבכם.

2. לעתים הרמזים וההדרכות לשאלות נראים כפתרונות מלאים. זאת אשליה: כמעט כל טענה (*אפילו שוויון בין קבוצות*) המופיעה שם צריכה הצדקה (*אפילו אם זה "טריוויאלי"*), והכוונה היא שהתלמיד יכתוב את כל ההצדקות האלו בפתרון התרגיל.

3. למציאת מקום ההגדרות, כדאי להיעזר במפתח המובא בסוף החוברת (*כרגע אין מפתח ...*).

הערות למרצה. בקיץ תש"ס העברתי קורס על פי החוברת. כצפוי, הפרק על סודרים היה מעט יותר קשה, מבחינת התלמידים, ביחס לשאר הפרקים. להלן משך הזמן שיש להקדיש, לדעתי, לכל נושא (*כל שיעור נמשך שעה וארבעים דקות, וחלק מהתרגילים יש לפתור בשיעור התרגיל שנמשך אף הוא זמן דומה, או בעבודות הבית*):

- פרק א (אקסיומות): שני שיעורים.
- פרק ב (סדרים חלקיים): שיעור אחד.
- פרק ג (סודרים): ארבעה שיעורים.
- פרק ד (עוצמות): שניים עד שלושה שיעורים.
- פרק ה (משפט Cantor–Bendixon): שיעור אחד עד שני שיעורים.
- פרק ו (אקסיומת הבחירה): שיעור אחד עד שני שיעורים.
- נספח א (מערכות של מספרים): שני שיעורים.

מרצים שמוכרחים לדלג על חלק מהחומר יכולים להשמיט את הנושא של חזקות סודרים (*כולל את הנושא של אינדוקציה טרנספיניטית*), ולדלג על פרק ה', ו' או על נספח א'. אפשר לחילופין ללמד את הנספח בקורס תורת הקבוצות 1, כאשר מקבלים את הטבעיים ותכונותיהם כנתון (*ומבטיחים להגדיר אותם בצורה מדוייקת בקורס הנוכחי*).

תודות והשגות. עברו על חלקים מהחוברת והעירו הערות מועילות: עוזי וישנה, ניר אבני, אלישבע לרנר. אלישבע גם תרגלה את הקורס בהצלחה.

פרופסור יעקב שוויקה – "סִינַי" ותיק בהוראת הקורס – העיר מספר הערות מבניות מהותיות. להלן, בקיצור נמרץ, שתיים מהערותיו המהותיות ביותר:

1. לקהיליה המתמטית לקח כמעט דור שלם להגיע להבנה שיש צורך באקסיומטיזציה, וגיבושה דרש מאמצים אינטלקטואליים אדירים (*הפרדוקסים ה"אמיתיים" של תורת הקבוצות נחשפים רק לאחר שמפתחים את הנושאים של עוצמות וסודרים*). לפיכך, לטעמו, כדאי להשאיר את האקסיומטיזציה לשלב שלקראת סוף הקורס.

2. לאור נסיונו, נראה שכדאי ללמד את הנושא של עוצמות לפני סודרים, משום שהוא יותר פשוט להפנמה, ויותר חשוב מבחינה מתמטית.

כדי להשתמש בחוברת לפי גישה זאת, יש לדלג על הפרק הראשון ועל השאלות הנוגעות לאקסיומות, המופיעות בפרקים שלאחר מכן. לימוד העוצמות לפני הסודרים אינו קל, בשל החסר בבסיס פורמאלי – אולם ניתן לעקוף בעיה זאת בעזרת שימוש ב"הנחות" מסויימות שיוכחו בפרק על סודרים. גישה כזאת אפשר למצוא בספר *Introduction to Set Theory* של Hrbacek ו Jech. בכל אופן, רוב התרגילים המופיעים כאן יתאימו גם לגישה זאת, ולכן מבחינה זאת מי שבוחר ללכת בדרך זאת יראה בפרקים הרלוואנטיים פרקי תירגול בלבד (ולא פרקי לימוד).

פרופסור עזריאל לוי עשה עמי חסד גדול בעוברו על החוברת ובהעירו הערות סגנון ומבנה חשובות.

ספרות עזר. הגישה, וחלק גדול מהתרגילים, הם על פי הסקירה בתחילת הספר *Set Theory* של Kunen. יש הרבה ספרים טובים בתורת הקבוצות (כגון: *Basic Set Theory* של עזריאל לוי, וכן החלק השני של הספר העוסק בנושא של האוניברסיטה הפתוחה), אולם כל ספר הוא בעל גישה שונה מעט מהמובא כאן. כמו שהזכרתי קודם כדאי לעיין בספר *Introduction to Set Theory* של Hrbacek ו Jech (אפשר למצוא שם גם תרגילים מעניינים שאינם מופיעים כאן). ספר מעולה ובעל גישה דומה למובא כאן הוא ספרו של Ciesielski, *Set Theory for the Working Mathematician*.

פירוט על חתכי דדקינד אפשר למצוא גם בספר הקלאסי חשבון אינפיניטסימלי של מייזלר.

ספר טוב על גירסאות של אקסיומת הבחירה: *Equivalents of the Axiom of Choice*, של Rubin & Rubin.

לקריאה נוספת והרחבות, ראה בנספח השני של החוברת.

תוכן העניינים

פרק א: כללי המשחק

1 בשביל מה

מהן קבוצות? במהלך ההיסטוריה היו נסיונות להגדיר את המושג "קבוצה" בצורה אינטואיטיבית. נסיונות אלו הובילו לפרדוקסים (סתירות). הפרדוקס המפורסם ביותר מובא בתרגיל הבא. כידוע, אברי קבוצה יכולים להיות קבוצות בעצמם. שאלה לגיטימית היא, האם קבוצה A יכולה להיות איבר של עצמה (כלומר האם $A\in A$). מי שלא מרגיש נוח עם זה שקבוצה יכולה להיות איבר של עצמה, יכול להחליט שהוא מסתכל רק על האוסף V של הקבוצות שאינן איבר של עצמן.

1.1 תרגיל (הפרדוקס של Russel). תהא $V=\{A : A\notin A\}$. האם $V\in V$? [רמז: הראה שלא ייתכן ש $V\in V$, ולאחר מכן הראה שלא ייתכן ש $V\notin V$.]

הפרדוקס הזה מעמיד באור מביך את כל המתמטיקה הנאיבית. ה"חלום" של Russel היה לבנות מערכת אקסיומטית פשוטה ונקיה מסתירות, שממנה אפשר יהיה לקבל את כל המתמטיקה. המקום הטבעי להתחיל בו היה תורת הקבוצות.

כדי להמנע מסתירות, פנו המתמטיקאים לגישה הפורמאלית לנושא: איננו יודעים בדיוק מה הן קבוצות, אבל אנחנו יודעים מה הן צריכות לקיים. לתכונות הבסיסיות של קבוצות נקרא **אקסיומות**. אפשר לחשוב על הקבוצות כ"חיילים" במשחק, ועל האקסיומות כעל "כללי המשחק", האומרים איזה חיילים יש ואיזה חיילים אפשר לקבל כאשר יש בידינו חיילים מסויימים ("אם יש לך חייל מסוג x וחייל מסוג y, אז אתה מקבל בנוסף חייל מסוג z"). הגישה הפורמאלית הוכיחה את עצמה, במובן שאין בה סתירות פנימיות.

אנו נציג וריאציה של הגישה של Zermelo ו Fraenkel, שנקראת על שמם ZFC (ZF עבור ראשי התיבות של שמותיהם, ו C בשביל "אקסיומת הבחירה" – Choice – שנפגוש בהמשך).

תורת הקבוצות המודרנית עוסקת בחקר קבוצות בלבד. לפיכך, כשאומרים בתורת הקבוצות "לכל x" הכוונה היא "לכל קבוצה x" (בפרט, איננו עוסקים בקבוצות של מכוניות או פרחים). אחד השינויים ביחס לתורת הקבוצות הנאיבית הוא, שכאן גם איברים של קבוצות הם קבוצות בעצמם. הסיבה לכך היא נוחיות גרידא (הוספת עצמים שאינם קבוצות אינה גוררת בעיות, אולם היא מסרבלת את הנימוק ואינה מובילה למתמטיקה מעניינת). שאלה מיידית היא, מה לגבי ה"איברים" המפורסמים כמו $1,2,3,\ldots$, ש"אינם קבוצות"? מתברר שאפשר להגדיר גם אותם, ולמעשה כל דבר במתמטיקה, בעזרת קבוצות. אנו נמחיש זאת בחוברת זו.

2 השפה של תורת הקבוצות

הערה. על סעיף זה מומלץ לעבור רק לשם הבנה כללית של הנושא. דיון מדוייק ומפורט בנושאים המובאים כאן מכוסה בדרך כלל בקורס **לוגיקה מתמטית**.

שימוש בשפה היומיומית שלנו לעיסוק בתורת הקבוצות עלול אף הוא להוביל לפרדוקסים.

2.1 תרגיל. א. הסבר מדוע אוסף המשפטים בני פחות מ 100 מלים הוא סופי.

ב. הוכח שקיים מספר טבעי n שלא ניתן לתאר בפחות מ 100 מלים.

ג. יהא n המספר הקטן ביותר שלא ניתן לתאר בפחות מ 100 מלים. הראה שהמשפט שקראת זה עתה מתאר את n בפחות מ 100 מלים. מהי הסתירה?

כדי להימנע מסתירות כאלה, נשתמש בשפה חד משמעית ומדוייקת לחקר תורת הקבוצות. האקסיומות, המשפטים, ואפילו ההוכחות של תורת הקבוצות ניתנים לניסוח בשפה זאת. בפועל, נרבה להשתמש בניסוחים שלנו בשפה העברית, אבל נעשה זאת רק כאשר **ברור** לנו שניתן לנסח את דברינו גם בשפה של תורת הקבוצות.

כמו בכל שפה, בשפה שלנו יש אותיות, שמהן מרכיבים משפטים. האותיות של השפה שלנו יהיו: $\in$ (שייכות), $=$ (שוויון), $($, $)$, (סוגריים לציין את אופן קריאת המשפטים), הקשרים הלוגיים $\neg$ (לא), $\wedge$ (וגם), $\vee$ (או), $\rightarrow$ (גורר), $\leftrightarrow$ (שקול), הַכַּמָּתִים $\forall$ (לכל), $\exists$ (קיים), וכן אותיות שיציינו קבוצות $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$,$a, b, c, \ldots$,$A, B, C, \ldots$ וכולי. האותיות שמציינות קבוצות ייקראו גם **משתנים**.

לא לכל רצף של אותיות בשפה אפשר לתת משמעות.

2.2 תרגיל. לאילו מהרצפים הבאים יש משמעות?

א. $\forall x \forall y (x \in y)$.

ב. $\forall z \wedge \rightarrow \neg x$.

ג. $\forall x (x = y)$.

על הרצף בסעיף 2.2(ג) אפשר לחשוב כמדבר על הקבוצה (השרירותית) y.

משפט תקני בשפה של תורת הקבוצות ייקרא **נוסחה** של תורת הקבוצות (נוסחה מציינת תכונה שיש או שאין לקבוצות).

הסימונים $a \in b$ או $a = b$ כאשר a, b מציינים קבוצות נקראים **נוסחה בסיסית**.

באופן יותר כללי, φ היא **נוסחה** של תורת הקבוצות אם מתקיימת אחת מהאפשרויות הבאות:

1. φ נוסחה בסיסית, כלומר מהצורה $x\in y$ או $x=y$.
2. יש נוסחאות ψ,χ כך ש φ היא אחת מהאפשרויות הבאות:

$(\neg\psi)$, $(\psi\wedge\chi)$, $(\psi\vee\chi)$, $(\psi\rightarrow\chi)$, $(\psi\leftrightarrow\chi)$.

3. יש נוסחה ψ כך ש φ היא $(\exists x\psi)$ או $(\forall x\psi)$, כאשר x מציין קבוצה.

לפי זה, נוסחה של תורת הקבוצות היא רצף אותיות שמתקבל מנוסחאות בסיסיות על ידי הפעלת הכללים (2) ו (3) מספר פעמים על נוסחאות בסיסיות (ולא אלה שמתקבל מהן).

2.3 תרגיל. הראה כיצד ניתן לקבל את הנוסחאות הבאות מנוסחאות בסיסיות:

א. $(\exists x((x\in y)\wedge(x=z)))$.

ב. $((x=y)\vee(y=z))$.

ג. $((\forall x(\forall y((x=y)\vee(\neg x=y))))\wedge(\forall y(\exists z(x\in z))))$.

משתנים חופשיים. אם בנוסחה φ מופיע משתנה חופשי (כלומר "לכוד" על ידי כָּמָת), אז $\varphi(a)$ מציין את ההצבה של a במקום המשתנה החופשי. למשל, אם φ היא הנוסחה $(\forall y(x=y))$, אז המשתנה x חופשי בנוסחה φ ולכן $\varphi(a)$ היא הנוסחה $\forall y(a=y)$. פורמלית, המושג **משתנה חופשי** מוגדר באינדוקציה:

1. המשתנים החופשיים בנוסחאות $x\in y$ ו $x=y$ הם x ו y.
2. המשתנים החופשיים בנוסחאות מאחת הצורות הבאות:

$(\psi\wedge\chi)$, $(\psi\vee\chi)$, $(\psi\rightarrow\chi)$, $(\psi\leftrightarrow\chi)$

הם המשתנים שחופשיים ב ψ או ב χ.

3. המשתנים החופשיים בנוסחה $\neg\psi$ הם אלו שחופשיים בנוסחה ψ.
4. המשתנים החופשיים בנוסחה $(\exists x\psi)$ ובנוסחה $(\forall x\psi)$ הם אלו שחופשיים ב ψ, פרט ל x.

2.4 תרגיל. מצא את המשתנים החופשיים בכל אחת מהנוסחאות שבתרגיל הקודם.

קצרנות/בהירות. תרגיל 2.3(ג) ממחיש שהמשפטים בשפה של תורת הקבוצות יכולים להיראות מסורבלים. נפתור בעיה זאת על ידי כמה מוסכמות:

1. לעתים נשמיט חלק מהסוגריים (נעשה זאת רק כאשר ברור איך לקרוא את הנוסחה).
2. לאורך כל החוברת, נציג **קיצורי דרך**, דהיינו סימונים שמציינים נוסחאות מסויימות. למשל, $a\subseteq b$ הוא קיצור דרך לנוסחה $\forall x(x\in a\rightarrow x\in b)$.
3. נשתמש במלים במקום כמתים/קשרים וכולי, כאשר ברור לנו שאפשר לתרגם את מה שאנחנו אומרים לנוסחה. למשל, המשפט "לכל x ולכל y קיים z כך ש ... " בא במקום הנוסחה $\forall x\forall y\exists z(\ \dots\ )$.

קיצורי דרך שימושיים הם $\forall x\in A$ וכן $\exists x\in A$. הנוסחה $\forall x\in A\varphi$ פירושה $\forall x(x\in A\rightarrow\varphi)$, ובדומה עבור

הנוסחה $\exists x\varphi$. קיצור חשוב נוסף הוא ה"כמת" $\exists!x$ שפירושו "קיים x יחיד".

2.5 תרגיל. תהא φ נוסחה כלשהי. כתוב את הביטוי $\exists!x\varphi(x)$ כנוסחה מפורשת של תורת הקבוצות.

יש לציין שלשם פשטות, התיאור שניתן בקורס הזה אינו מפורט בצורה מלאה. פירוט מלא דורש ידע שלא יכוסה בקורס זה (ראה פרק 1 בספר *Set Theory* של Kenneth Kunen).

הסעיפים הבאים מתארים את האקסיומות של תורת הקבוצות וכן תרגילים ודיונים בנושא, כולם לפי עקרונות הקצרנות/בהירות דלעיל.

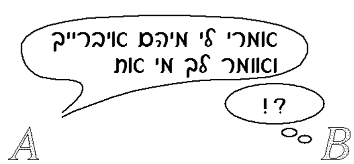
3 קיום ויחידות

כדי שיהיה על מה לדבר, האקסיומה הראשונה אומרת שקיימת קבוצה. לשם פשטות, נסתפק בקיומה של קבוצה שאין בה איברים.

אקסיומת הקיום. קיימת קבוצה A כך שאין x שעבורו $x\in A$.

אפשר לחשוב על האותיות $a,b,c,\dots$, $A,B,C,\dots$ המציינות קבוצות כשמות של קבוצות. לפי זה, ייתכן שלקבוצה אחת יהיו שני שמות (כלומר, A וגם B). האקסיומה הבאה מאפשרת לנו לזהות שזה אכן המצב, מתוך התבוננות באברי הקבוצות. האקסיומה אומרת שכל קבוצה נקבעת על ידי איבריה.

אקסיומת היחידות. אם A,B קבוצות כך שלכל a, $a\in B \leftrightarrow a\in A$, אזי $A=B$.



3.1 תרגיל. כתוב את אקסיומת היחידות כנוסחה (לפי ההגדרה בסעיף 2 לעיל).

עבור שתי קבוצות A,B, נאמר ש A **חלקית ל** B, ונסמן $A\subseteq B$, אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\in B$. אם $A\subseteq B$ ובנוסף $A\neq B$, נכתוב $A\subset B$.

3.2 תרגיל. הוכח שאם $A\subseteq B$ וכן $B\subseteq A$, אזי $A=B$.

קבוצה שאיבריה היחידים הם $a,b,c,\ ...$ תסומן $\{a,b,c,\ ...\ \}$.

3.3 תרגיל. הוכח:

א. אם $A\neq B$, אזי קיים $a\in A$ כך ש $a\notin B$, או שקיים $b\in B$ כך ש $b\notin A$.

ב. אם $a\notin B \leftrightarrow a\notin A$, אזי $A=B$.

3.4 תרגיל. הוכח: אם קיים $a\in A$ כך ש $a\notin B$, אזי $A\neq B$.

3.5 תרגיל. הוכח: אם $\forall a\ a\notin A$, וכן $\forall b\ b\notin B$, אזי $A=B$.

התרגיל האחרון הראה שאין יותר מקבוצה אחת שאין בה איברים. נסמן את הקבוצה הזאת ב $\emptyset$, והיא תיקרא **הקבוצה הריקה**.

3.6 תרגיל. הוכח שלכל קבוצה A, $A\subseteq A$, וכן $\emptyset\subseteq A$.

4 יסודיות (סעיף רשות)

כאמור לעיל, אברי קבוצה הם בעצמם קבוצות. האקסיומה הבאה נועדה למנוע תופעות מוזרות.

אקסיומת היסודיות. אם $A\neq\emptyset$, אזי קיים $a\in A$ כך שאם $b\in a$, אז $b\notin A$.

4.1 תרגיל. כתוב את הנוסחה המתאימה לאקסיומת היסודיות.

4.2 תרגיל. הנח שהקבוצות הבאות קיימות, והראה שהן מקיימות את אקסיומת היסודיות:

א. $\emptyset$.

ב. $\{\{\emptyset\}\}$.

ג. $\{\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

אקסיומת היסודיות אינה חשובה לרוב ענפי המתמטיקה. החשיבות שלה היא כאשר באים לנתח שאלות עמוקות יותר בתורת הקבוצות: היא נותנת "שליטה" על העולם של כל הקבוצות. להלן דוגמא לתופעה מוזרה שהאקסיומה מונעת.

4.3 תרגיל. האם תיתכן קבוצה $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ כך שלכל $i=1,2,3,\ldots$ מתקיים $A_{i+1}\in A_i$?

5 הפרדה

האקסיומה הבאה מאפשרת להגדיר תת–קבוצה של קבוצה נתונה לפי תכונה הנקבעת על ידי נוסחה.

אקסיומות ההפרדה. לכל נוסחה $\varphi(x,y)$ (אין בה משתנים חופשים פרט אולי ל x,y), נגדיר את האקסיומה הבאה: לכל קבוצה A, וקבוצה p, קיימת הקבוצה $B=\{a\in A : \varphi(a,p)\}$.

דני הוא תלמיד פיקח שמלווה את הקורס שלנו בשאלות חש**דני**ות.

5.1 תרגיל. דני חושב שהוא מצא בעיה באקסיומות. עיזרו לדני למצוא את הטעות בטיעון הבא:

תהא $A\neq\emptyset$ קבוצה כלשהי, ונגדיר תת–קבוצה B של A על ידי $B=\{a\in A : a\notin B\}$ (דני השתמש באקסיומת ההפרדה כאשר הנוסחה φ היא $\neg(a\in B)$). ניקח $a\in A$ כלשהו. אם $a\in B$, אז מהגדרת B, $a\notin B$. לכן $B=\emptyset$. מאידך, לכל $a\in A$, $a\notin B$ (כי B ריקה), אבל לפי הגדרת B, זה אומר ש $a\in B$. קיבלנו שלכל $a\in A$, $a\in B$. לכן $A\subseteq B$. כיון ש $B=\emptyset$, גם $A=\emptyset$, בסתירה להנחה ש $A\neq\emptyset$. לכן כל הקבוצות ריקות, כלומר יש רק קבוצה אחת, והיא הקבוצה הריקה.

5.2 תרגיל. תהא φ נוסחה, ותהא A קבוצה. הוכח את קיום הקבוצות $A_1=\{a\in A : \varphi(a)\}$, $A_2=\{a\in A : \neg\varphi(a)\}$. (במלים, אקסיומת ההפרדה מאפשרת "להפריד" את A לשתי קבוצות לפי התכונה φ.)

התרגיל הבא מגדיר כמה פעולות בסיסיות על קבוצות.

5.3 תרגיל. יהיו A,B קבוצות כלשהן. הוכח את קיומן של הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B:=\{a : a\in A \text{ וגם } a\in B\}$.

ב. $A\setminus B:=\{a : a\in A \text{ וגם } a\notin B\}$.

5.4 תרגיל (חיתוך של אוסף של קבוצות). תהא F קבוצה לא ריקה. הוכח שקיימת הקבוצה $\cap F = \{x : \forall A\in F\ (x\in A)\}$. [רמז: התחל עם קבוצה כלשהי $X\in F$.]

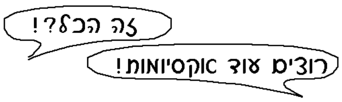
בעוד שבתורת הקבוצות הנאיבית היו פרדוקסים, בתורת הקבוצות שאנו מפתחים עכשיו פרדוקסים רק מראים ש"אוספים" מסויימים אינם קבוצות: מניחים בשלילה שהם כן קבוצות, ומגיעים לסתירה. הסתירה היא להנחה שהם קבוצות, לכן הם לא קיימים כקבוצות.

5.5 תרגיל (קבוצה אוניברסלית). א. הוכח שאין קבוצה U כך שלכל קבוצה A, $A\in U$. עשה זאת מבלי להשתמש באקסיומת היסודיות. [הדרכה: נניח בשלילה שיש קבוצה כזאת U. הראה שקיימת הקבוצה $B=\{a\in U : a\notin a\}$. השתמש בפרדוקס של Russel.]

ב. הסבר מדוע להגדרה של $\cap F$ יש משמעות רק כאשר F לא ריקה.

כעת יש לנו מספיק אקסיומות כדי להוכיח שהמקרה הפתולוגי $A\in A$ לא מתקיים.

5.6 תרגיל. האם תיתכן קבוצה A המקיימת $A\in A$? [ראה: בשלילה, הוכח את קיום הקבוצה $\{A\}$ (הפרדה), והראה שהיא סותרת את אקסיומת היסודיות.]



נשים לב שעד כה, הקבוצה היחידה שאנו יודעים על קיומה היא $\emptyset$.
כדי לבנות עוד קבוצות, נזדקק לאקסיומות נוספות.

6 זיווג

אקסיומת הזיווג. לכל a,b קיימת הקבוצה $A=\{a,b\}$.

עכשיו אפשר לבנות קבוצות עם איבר אחד, ועם שני איברים.

6.1 תרגיל. א. הוכח את קיומן של הקבוצות $\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.
ב. הסבר (ניחוש, ללא הוכחה) מדוע אינך מצליח לבנות קבוצה עם שלשה איברים?

לכל a,b נגדיר את **הזוג הסדור** $\langle a,b\rangle$ להיות הקבוצה $\{\{a\},\{a,b\}\}$.

6.2 תרגיל. הראה שהקבוצה $\{\ \{b\},\{\ b,\{\{b\}\}\ \}\ \}$ היא זוג סדור (מהם רכיבי זוג סדור זה)?

כל מטרתה של ההגדרה המסורבלת יחסית של "זוג סדור" היא לקבל את התוצאה הבאה. מרגע שקיבלנו אותה, אפשר לשכוח מההגדרה המקורית ולעבוד עם זוגות סדורים רק מתוך ידיעת התוצאה הזאת.

6.3 תרגיל. א. הוכח שלכל a,b קיים הזוג הסדור $\langle a,b\rangle$.
ב. הוכח שאם $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$, אזי $a=c$ וכן $b=d$.

6.4 תרגיל. דני חושב שההגדרה של זוג סדור מסורבלת מדי. הוא מציע להגדיר $\langle a,b\rangle=\{a,\{b\}\}$. הראה לדני, בעזרת דוגמא, שלפי ההגדרה שלו ייתכן $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$ למרות ש $a\neq c, b\neq d$.

הנה עוד מקרה פתולוגי שלא יכול להתקיים לאור האקסיומות שיש לנו עד כה.

6.5 תרגיל. האם קיימות קבוצות A,B המקיימות $A\in B\in A$? [רמז: הוכח את קיום הקבוצה $\{A,B\}$.]

7 איחוד

האקסיומה הבאה מאפשרת לאחד קבוצות.

אקסיומת האיחוד. לכל קבוצה $\mathcal{F}$, קיימת הקבוצה $\cup\mathcal{F}=\{x : \exists A\in\mathcal{F}(x\in A)\}$.

7.1 תרגיל. הוכח שלכל שתי קבוצות A,B קיימות הקבוצות:

א. $A\cup B := \{a : a\in A$ או $b\in B\}$.

ב. $A\Delta B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

עכשיו אפשר לבנות קבוצות עם 3, 4, ויותר איברים.

7.2 תרגיל. בנה קבוצה עם שלשה איברים, וקבוצה עם ארבעה איברים. [רמז: למשל, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$.]

8 פונקציות והחלפה

תהא A קבוצה כלשהי. נאמר שנוסחה φ היא **כלל התאמה** על A אם לכל $x\in A$ קיים y יחיד עם התכונה $\varphi(x,y)$ ("לכל x מתאים y יחיד כך שמתקיים $\varphi(x,y)$").

אקסיומות ההחלפה. לכל נוסחה $\varphi(x,y,z,w)$ (אין לה משתנים חופשיים פרט אולי ל x,y,z,w), מוגדרת האקסיומה הבאה: לכל קבוצה A וקבוצה p, אם $\varphi(x,y,A,p)$ כלל התאמה על A, אז קיימת הקבוצה $B=\{y : \exists x\in A\varphi(x,y,A,p)\}$.

8.1 תרגיל. יהיו A,B קבוצות כלשהן.

א. הוכח שלכל $b\in B$, קיימת הקבוצה $A\times\{b\}:=\{\langle a,b\rangle : a\in A\}$. [רמז: לכל $a\in A$ קיים z יחיד המקיים

[.$z=\langle a,b\rangle$

ב. הוכח את קיום **המכפלה החיצונית** (**קרטזית**) $A\times B:=\{\langle a,b\rangle : a\in A,\ b\in B\}$. [ראו: $A\times B=\bigcup\{A\times\{b\} : b\in B\}$.]

עבור קבוצות A,B, ו $f\subseteq A\times B$, נאמר ש $f{:}A\to B$ **פונקציה** (או: **העתקה**) אם: לכל $a\in A$ יש $b\in B$ **יחיד** כך ש $\langle a,b\rangle\in f$ (במקרה זה נסמן $f(a)=b$).

8.2 תרגיל. מה ההבדל בין פונקציה לכלל התאמה? [ראו: פונקציה היא קבוצה, וכלל התאמה הוא ...]

אם $f{:}A\to B$ פונקציה, אומרים שהקבוצה A היא **התחום** של f ($A=\mathrm{dom}(f)$), והקבוצה B היא **הטווח** של f ($B=\mathrm{ran}(f)$).

למרות שפונקציה וכלל התאמה הם מושגים שונים, הרי שכל פונקציה מגדירה כלל התאמה, וכל כלל התאמה מגדיר פונקציה עם תכונות דומות. התרגיל הבא מנסח זאת במדויק.

8.3 תרגיל (**הקשר בין פונקציות לכללי התאמה**). א. תהא $f{:}A\to B$ פונקציה, ותהא φ הנוסחה $f(a)=b$. הראה ש φ כלל התאמה על A. [ראו: f יכולה להיות פרמטר בנוסחה.]

ב. תהא φ כלל התאמה על A. הוכח שקיימת פונקציה f עם $\mathrm{dom}(f)=A$, כך שלכל $a\in A$, $f(a)=b\leftrightarrow\varphi(a,b)$.

התמונה של f היא הקבוצה $\mathrm{im}(f):=\{f(a) : a\in A\}$.

8.4 תרגיל. תהא $f{:}A\to B$ פונקציה.

א. הוכח שהתמונה $\mathrm{im}(f)$ קיימת כקבוצה.

ב. (הכללה של (א)) הוכח שלכל $\tilde{A}\subseteq A$, קיימת הקבוצה $f[\tilde{A}]:=\{f(a) : a\in\tilde{A}\}$.

8.5 תרגיל. הוכח שאם $f{:}A\to B$ פונקציה, אז לכל C כך ש $\mathrm{im}(f)\subseteq C\subseteq B$, $f{:}A\to C$ פונקציה.

8.6 תרגיל. א. הסבר את הארבע-שיר הבא:

כוס רצית לדעת מהי העתקה
דע שהיא שדכנית – אך הסתם ותיקה
זוגות זוגות לחיכה נכנסים
מימין הגברים ומשמאל – הנשים

ב. איך היית קורא לפונקציה שמקיימת את חרם דרבנו גרשום?

אם לכל $b\in\mathrm{im}(f)$ יש רק a יחיד כך ש $f(a)=b$, f תיקרא **חד-חד ערכית**, או בקיצור: **חח"ע** (injection).

f **על** (surjection) אם $\mathrm{im}(f)=B$.

f **מיפוי** (bijection) אם f חח"ע ועל.

8.7 תרגיל. תהא $f{:}A\to B$ פונקציה, ותהא $\tilde{A}\subseteq A$. הוכח שקיימת פונקציה יחידה $g{:}\tilde{A}\to B$ כך שלכל $a\in\tilde{A}$ מתקיים $g(a)=f(a)$. [ראו: $g=f\cap(\tilde{A}\times B)$.]

הפונקציה בתרגיל האחרון תיקרא **הצימצום של** f **לקבוצה** $\tilde{A}$, ותסומן $f|_{\tilde{A}}$.

8.8 תרגיל (הטלות). יהיו A,B קבוצות כלשהן. הוכח את קיומן של הפונקציות הבאות:

א. $\pi_1{:}A\times B\to A$ כך שלכל $\langle a,b\rangle\in A\times B$ מתקיים $\pi_1(\langle a,b\rangle)=a$.

ב. $\pi_2{:}A\times B\to B$ כך שלכל $\langle a,b\rangle\in A\times B$ מתקיים $\pi_2(\langle a,b\rangle)=b$.

קבוצה F של קבוצות תיקרא **שרשרת** אם לכל $A,B\in F$ מתקיים $A\subseteq B$, או $B\subseteq A$. אם כל אברי F הם פונקציות, F תיקרא **שרשרת פונקציות** (כלומר לכל $f,g\in F$ מתקיים $f\subseteq g$, או $g\subseteq f$). עובדה חשובה היא, שאיחוד שרשרת של פונקציות נותן פונקציה.

8.9 תרגיל. תהא F שרשרת פונקציות. נסמן $\tilde{f}{:}=\cup F$. הוכח:

א. $\tilde{f}$ היא פונקציה עם תחום $\cup\{\mathrm{dom}(f)\ :\ f\in F\}$ ותמונה $\cup\{\mathrm{im}(f)\ :\ f\in F\}$.

ב. אם כל הפונקציות ב F הן חד-חד ערכיות, אז גם $\tilde{f}$ חד-חד ערכית.

9 קבוצת החזקה

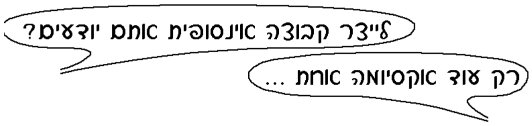
אקסיומת קבוצת החזקה. לכל קבוצה A קיימת הקבוצה $\mathcal{P}(A)=\{B\ :\ B\subseteq A\}$.

עם האקסיומה הזאת, אפשר לייצר קבוצות גדולות בקצב מסחרר.

9.1 תרגיל. הראה כיצד ניתן לבנות, בדרך קצרה ככל האפשר, קבוצה שגודלה 128 איברים.

9.2 תרגיל. יהיו A,B קבוצות. הוכח את קיום הקבוצה $A\times B$ מבלי להשתמש באקסיומת ההחלפה. [ראו: היעזר בקבוצה $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$.]

10 אינסוף: קבוצה אינסופית ובחירה



לכל קבוצה a, נגדיר את **העוקב של** a כך: $S(a)=a\cup\{a\}$.

אקסיומת הקבוצה האינסופית. קיימת קבוצה A כך ש $\emptyset\in A$ ולכל $a\in A$ מתקיים $S(a)\in A$.

האקסיומה הזאת תאפשר לנו לייצר קבוצה אינסופית. כרגע, המושג "אינסופי" עדיין לא מוגדר, לכן נחכה עם בניית הקבוצה עד שיהיו לנו ההגדרות הדרושות.

החיים בלי יכולת בחירה יכולים להיות משעממים. האקסיומה הבאה מאפשרת, בהינתן אוסף של קבוצות לא ריקות, "לבחור" איבר אחד מכל קבוצה. אם האוסף הוא סופי, אפשר לבחור "ידנית" איבר מכל קבוצה. אבל האוסף יכול להיות גדול מדיי ("אינסופי"). במקרה זה, דרושה פונקציה שתבצע עבורנו את העבודה.

אקסיומת הבחירה. אם $\mathcal{F}$ קבוצה כך שכל אבריה הם קבוצות לא ריקות, אז יש פונקציה f עם $\mathrm{dom}(f)=\mathcal{F}$, כך שלכל $A\in\mathcal{F}$, $f(A)\in A$.

פונקציה f המקיימת את האמור באקסיומה נקראת **פונקצית בחירה** על $\mathcal{F}$. מעניין לציין, שכאשר האוסף הנתון $\mathcal{F}$ של קבוצות לא ריקות הוא סופי, אפשר להוכיח קיום פונקצית בחירה על $\mathcal{F}$ מבלי להזדקק לאקסיומת הבחירה (בעזרת אינדוקציה, שתוגדר בהמשך, ניתן להוכיח זאת **לכל** קבוצה סופית $\mathcal{F}$).

10.1 תרגיל. תהא $A=\{x,y,z\}$ קבוצה של קבוצות לא ריקות. הוכח שקיימת פונקצית בחירה על A, מבלי להשתמש באקסיומת הבחירה.

10.2 תרגיל. יהיו A,B קבוצות זרות, שכל איבריהן הם קבוצות לא ריקות. תהא f פונקצית בחירה על A, ותהא g פונקצית בחירה על B. נסמן $h:=f\cup g$. הוכח:

א. h פונקציה עם תחום $A\cup B$.

ב. h היא פונקצית בחירה על $A\cup B$.

ג. נניח ש A,B אינן זרות. מהו התנאי על f ו g כדי ש $h=f\cup g$ תהא פונקצית בחירה על $A\cup B$?

10.3 תרגיל (בחירה מאוסף זר). תהא F קבוצה שכל אבריה הם קבוצות לא ריקות וזרות זו לזו. הוכח שקיימת קבוצה s המכילה איבר אחד בדיוק מכל קבוצה $X\in F$, ולא עוד איברים. [רמז: תהא f פונקצית

בחירה על F. התבונן ב $\operatorname{im}(f)$.]

קבוצה של זוגות סדורים $R\subseteq A\times A$ תיקרא **יחס על** A. אם $\langle a,b\rangle\in R$, נסמן זאת aRb, אחרת נכתוב $a\not R b$.
נסמן גם $\operatorname{dom}(R)=\{a\in A : \exists b\in A\ (aRb)\}$, וכן $\operatorname{im}(R)=\{b\in A : \exists a\in A\ (aRb)\}$.

10.4 תרגיל (יוניפורמיזציה של יחסים). יהא R יחס על קבוצה A. $B=\operatorname{dom}(R)$. הוכח שקיימת פונקציה f עם תחום B, כך שלכל $a\in B$, $aRf(a)$. [רמז: היעזר בפונקציית בחירה על אוסף כל הקבוצות מהצורה $\{b : aRb\}$.]

עוד נחזור לאקסיומות הנ"ל.

11 אקסיומות ZFC

לנוחות הקורא, מובאת כאן רשימת האקסיומות במרוכז. הפעם, כדי לגוון, אנו כותבים את האקסיומות בצורה פורמאלית (אבל עם קיצורי דרך). בנוסף לקיצורים הרגילים, נשתמש בקיצור $x\neq\emptyset$ עבור $\exists a(a\in x)$ ובקיצור $x=\emptyset$ עבור שלילתו.

0. **אקסיומת הקיום.** קיימת קבוצה A כך שאין x שעבורו $x\in A$:
$\exists A(A=\emptyset)$.
1. **אקסיומת היחידות.** אם A,B קבוצות כך שלכל a, $a\in A\leftrightarrow a\in B$, אזי $A=B$:
$\forall A\forall B[\forall a(a\in A\leftrightarrow a\in B)\rightarrow A=B]$.
2. **אקסיומת היסודיות.** אם $A\neq\emptyset$, אזי קיים $a\in A$ כך שאם $b\in a$, אז $b\notin A$:
$\forall A[A\neq\emptyset\rightarrow\exists a\in A\forall b(b\in a\rightarrow b\notin A)]$.
3. **אקסיומות ההפרדה.** לכל נוסחה $\varphi(x,y)$ (יתכן בה משתנים חופשיים פרט אולי ל x,y), נגדיר את האקסיומה הבאה:
לכל קבוצה A, וקבוצה p, קיימת הקבוצה $B=\{a\in A : \varphi(a,p)\}$:
$\forall A\forall p\exists B\forall a[a\in B\leftrightarrow (a\in A\wedge\varphi(a,p))]$.
4. **אקסיומת הזיווג.** לכל a,b קיימת הקבוצה $A=\{a,b\}$:
$\forall a\forall b\exists A\forall x[x\in A\leftrightarrow (x=a\vee x=b)]$.
5. **אקסיומת האיחוד.** לכל קבוצה $\mathcal{F}$, קיימת הקבוצה $\bigcup\mathcal{F}=\{x : \exists A\in\mathcal{F}(x\in A)\}$:
$\forall\mathcal{F}\exists U\forall A\forall x[(x\in A\wedge A\in\mathcal{F})\leftrightarrow x\in U]$.
6. **אקסיומות ההחלפה.** לכל נוסחה $\varphi(x,y,z,w)$ (יתכן לה משתנים חופשיים פרט אולי ל x,y,z,w), מוגדרת האקסיומה הבאה:

לכל קבוצה A וקבוצה p, אם $\varphi(x,y,A,p)$ כלל התאמה על A, אז קיימת הקבוצה $B=\{y : \exists x\in A\varphi(x,y,A,p)\}$:

$\forall A\forall p[\forall x\in A\exists! y\ \varphi(x,y,A,p)\rightarrow\exists B\forall y(y\in B\leftrightarrow\ \exists x(x\in A\ \wedge\ \varphi(x,y,A,p)))]$.

7. **אקסיומת קבוצת החזקה.** לכל קבוצה A קיימת הקבוצה $\mathcal{P}(A)=\{B : B\subseteq A\}$:

$\forall A\exists P\forall B(B\in P\leftrightarrow B\subseteq A)$.

8. **אקסיומת הקבוצה האינסופית.** קיימת קבוצה A כך ש $\emptyset\in A$ ולכל $a\in A$ מתקיים $a\cup\{a\}\in A$:

$\exists A[\forall x(x=\emptyset\rightarrow x\in A)\ \wedge\ \forall a\in A\forall x(\forall y(y\in x\leftrightarrow(y\in a\ \vee\ y=a))\rightarrow x\in A)]$.

9. **אקסיומת הבחירה.** אם $\mathcal{F}$ קבוצה כך שכל אבריה הם קבוצות לא ריקות, אז יש פונקציה f עם $\mathrm{dom}(f)=\mathcal{F}$, כך שלכל $A\in\mathcal{F}$, $f(A)\in A$: ניעזר בקיצור הדרך הבא

$\varphi_1(f,A)$: הנוסחה האומרת ש f פונקציה עם תחום A

$\varphi_2(f,A)$: הנוסחה האומרת ש $f(A)\in A$

$\forall\mathcal{F}[\forall A\in\mathcal{F}(A\neq\emptyset)\rightarrow\exists f(\varphi_1(f,\mathcal{F})\wedge\forall A\in\mathcal{F}(\varphi_2(f,A))]$.

11.1 תרגיל. כתוב במפורש את הנוסחאות $\varphi_1(f,A)$ ו $\varphi_2(f,A)$ המופיעות באקסיומת הבחירה לעיל.

פרק ב: סדרים

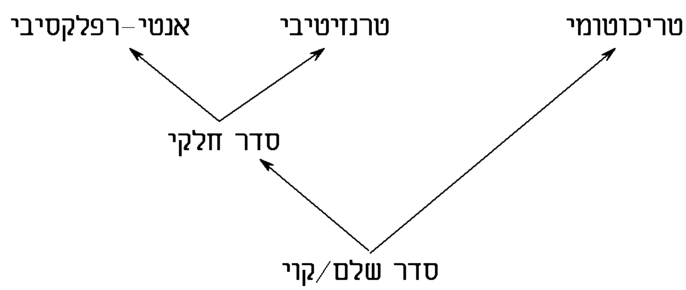
1 יחסים וסדרים

תזכורת: קבוצה של זוגות סדורים $R\subseteq A\times A$ תיקרא **יחס על** A. אם $\langle a,b\rangle\in R$, נסמן זאת aRb, אחרת נכתוב $a\not R b$. נסמן גם $\mathrm{dom}(R)=\{a\in A : \exists b\in A\ (aRb)\}$, וכן $\mathrm{im}(R)=\{b\in A : \exists a\in A\ (aRb)\}$.

יהא R יחס על A. היחס R ייקרא:

- **רפלקסיבי** אם לכל $a\in A$ מתקיים aRa, **ואנטי-רפלקסיבי** אם לכל $a\in A$ **לא** מתקיים aRa.
- **סימטרי** אם לכל $a,b\in A$ מתקיים $aRb\rightarrow bRa$.
- **טרנזיטיבי** אם לכל $a,b,c\in A$: $aRb\ \&\ bRc\ \rightarrow aRc$.
- **סדר חלקי** אם R אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי.
- **טריכוטומי** אם לכל $a,b\in A$ מתקיים: $a=b$ או aRb או bRa.
- **שלם/קוי** אם R סדר חלקי טריכוטומי.

מבלבל? הנה ציור שיעזור לכם:



כאשר R סדר חלקי, נכתוב לעתים $a<_R b$ במקום aRb כדי להדגיש שמדובר ביחס שהוא סדר חלקי. הסימון $a\leq_R b$ פירושו: $a<_R b$ או $a=b$.

1.1 תרגיל. הוכח, על ידי דוגמאות נגדיות, שלא ניתן להוסיף חיצים לציור הנ"ל (פרט לחיצים שניתן לקבל על ידי שילוב של שני חיצים).

1.2 תרגיל. יהא R סדר חלקי על A. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: לכל יחס Q על A כך ש $R\subseteq Q$, Q סדר חלקי על A.

התכונות של יחסים שהגדרנו לעיל עוברות בתורשה לתת-קבוצות.

1.3 תרגיל. הוכח את הטענות הבאות:

א. אם R יחס אנטי־רפלקסיבי על A, אז לכל $B\subseteq A$ $R\cap(B\times B)$ יחס אנטי־רפלקסיבי על B.

ב. אם R יחס טרנזיטיבי על A, אז לכל $B\subseteq A$ $R\cap(B\times B)$ יחס טרנזיטיבי על B.

ג. אם R סדר חלקי על A, אז לכל $B\subseteq A$ $R\cap(B\times B)$ יחס סדר חלקי על B.

ד. אם R יחס טריכוטומי על A, אז לכל $B\subseteq A$ $R\cap(B\times B)$ יחס טריכוטומי על B.

ה. אם R סדר קוי על A, אז לכל $B\subseteq A$ $R\cap(B\times B)$ סדר קוי על B.

אם R סדר חלקי/טריכוטומי/קוי על קבוצה המכילה את A (במקרה זה, לפי התרגיל האחרון, $R\cap(A\times A)$ סדר חלקי/טריכוטומי/קוי על A), נאמר ש $\langle A,R\rangle$ סדר חלקי/טריכוטומי/קוי.

יהא R סדר חלקי על A, ויהא $a\in A$.

- a **מזערי** (או: **מינימלי**) ב A (ביחס ל R) אם אין $x\in A$ המקיים $x<_R a$.
- a **ראשון** (או: **קטן ביותר**) ב A אם לכל $x\in A$ מתקיים $a\leq_R x$.

1.3 תרגיל. יהא R סדר שלם על A. ויהא $a\in A$. הוכח: a מזערי $\Leftrightarrow$ a ראשון.

1.4 תרגיל.* תהא $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה סגורה וחסומה. הוכח שב A יש איבר ראשון ביחס לסדר הרגיל של הממשיים. [רמז: קח $a_0\in A$. אם הוא ראשון, יופי. אחרת, קח $a_1\in A$ כך ש $a_1<a_0$. המשך כך לקבלת סדרה יורדת וחסומה מלרע של ממשיים.]

2 איזומורפיזם של סדרים וסדר טוב

יהיו R יחס על A ו S יחס על B, ותהא $f:A\to B$ פונקציה. f **שומרת סדר** אם לכל $x,y\in A$ כך ש $x<_R y$ מתקיים $f(x)<_S f(y)$. נאמר שהיחסים R ו S **איזומורפיים** ונסמן $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$ (או בקיצור: $A\cong B$) אם יש מיפוי שומר סדר $f:A\to B$. מיפוי שומר סדר f ייקרא גם **איזומורפיזם סדר**.

2.1 תרגיל. הוכח את התכונות הבאות של איזומורפיזם בין סדרים:

א. **רפלקסיביות:** $\langle A,R\rangle\cong\langle A,R\rangle$ לכל סדר חלקי $\langle A,R\rangle$.

ב. **סימטריות:** אם $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$, אז $\langle B,S\rangle\cong\langle A,R\rangle$.

ג. **טרנזיטיביות:** אם $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$ וכן $\langle B,S\rangle\cong\langle C,Q\rangle$, אזי $\langle A,R\rangle\cong\langle C,Q\rangle$

סדר חלקי $\langle A,R\rangle$ הוא **חסום מלעיל** אם יש $a\in A$ כך שלכל $x\in A$, $x<_R a$.

2.2 תרגיל. יהיו $\langle A,R\rangle$ סדר חלקי חסום מלעיל, ו $\langle B,S\rangle$ סדר חלקי שאינו חסום מלעיל. הוכח: $\langle A,R\rangle \ncong \langle B,S\rangle$.

יהא R סדר קוי על A. R **סדר טוב** על A אם לכל $\emptyset\neq B\subseteq A$ יש איבר ראשון (ביחס ל R). במקרה זה נאמר גם שהקבוצה A **סדורה היטב** על ידי R.

2.3 תרגיל. הוכח:

א. הקטע הממשי הסגור $A=[0,1]$ אינו סדור היטב על ידי הסדר הרגיל של הממשיים.

ב. קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ עם הסדר הרגיל שלה אינה סדורה היטב.

2.4 תרגיל. א. יהא R סדר שלם על A, כך שלכל $\emptyset\neq B\subseteq A$ קיים $b\in B$ כך שאין $x\in B$ שעבורו $x<_R b$.
הוכח ש R סדר טוב על A. [ראה: טריכוטומיות.]

ב. יהא R סדר חלקי על A, כך שלכל $\emptyset\neq B\subseteq A$ יש איבר ראשון ביחס ל R. הוכח ש R סדר טוב על A.
[ראה: כדי להוכיח טריכוטומיות, שים לב שלכל $x,y\in A$, $\emptyset\neq\{x,y\}\subseteq A$.]

2.5 תרגיל. יהא R סדר טוב על A. הוכח שלכל $B\subseteq A$, $\langle B,R\rangle$ סדר טוב.

לאור התרגיל האחרון, אם R סדר טוב על קבוצה המכילה את A אז $R\cap(A\times A)$ סדר טוב על A, ולכן נאמר בקיצור ש $\langle A,R\rangle$ סדר טוב.

דרך חשובה להגדיר סדר טוב על מכפלה חיצונית של קבוצות מופיעה בתרגיל הבא.

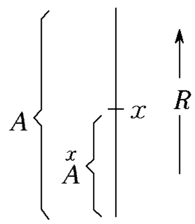
2.6 תרגיל. יהיו $\langle A,R\rangle$ ו $\langle B,S\rangle$ סדרים טובים. נגדיר **סדר מילוני** $<_{lex}$ על $A\times B$ על ידי:

$$\langle a,b\rangle <_{lex} \langle c,d\rangle \iff a<c \vee (a=c \wedge b<d).$$

הוכח ש $\langle A\times B,<_{lex}\rangle$ סדר טוב.

3 רישאות של קבוצות סדורות היטב

יהא R סדר שלם על A, ויהא $x\in A$. הקבוצה $\overset{x}{A} := \{a\in A : a <_R x\}$ תיקרא x–**רישא של** A. בציור:



3.1 תרגיל. יהא R סדר טוב על A.

א. יהיו $x,y\in A$ כך ש $x\le_R y$. הוכח: $\overset{x}{\overset{y}{A}}=\overset{x}{A}$.

ב. הוכח שלכל $x\in A$, $\overset{x}{A}\not\cong A$.

[הדרכה: נניח בשלילה שיש איזומורפיזם $f:A\to\overset{x}{A}$. אזי $f(x)<_R x$. הגדר $D=\{a\in A : f(a)<_R a\}$. הראה שיש איבר ראשון ב D, נסמנו y. כיון ש f שומרת סדר, מתקיים גם $f(y)\in D$. אבל $f(y)<_R y$. אז מה?]

ג. הוכח שלכל שני איברים שונים $x,y\in A$ מתקיים $\overset{x}{A}\not\cong\overset{y}{A}$.

אם יש איזומורפיזם בין שני סדרים טובים, אז הוא יחיד (כלומר אין עוד פונקציה בין הקבוצות שהיא איזומורפיזם).

3.2 תרגיל (יחידות האיזומורפיזם). א. יהיו R סדר טוב על A, ו S סדר טוב על B, כך ש $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$. הוכח שהאיזומורפיזם יחיד. [רמז: אם $f,g:A\to B$ איזומורפיזמים שונים, התבונן באיבר הראשון a של A שעבורו $f(a)\neq g(a)$. אם $g(a)<_S f(a)$, קח $b\in A$ שעבורו $f(b)=g(a)$, והראה ש $a<_R b$ ובכל זאת $f(b)<_S f(a)$.]

ב. יהא R סדר טוב על A. הוכח שהאיזומורפיזם היחיד $f:A\to A$ הוא הזהות ($f(a)=a$ לכל $a\in A$).

אם f איזומורפיזם בין הסדרים הטובים $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ ($f:A\to B$), נסמן זאת $\langle A,R\rangle\overset{f}{\cong}\langle B,S\rangle$.

3.3 תרגיל (צימצום איזומורפיזמים). יהי $\langle A,R\rangle\overset{f}{\cong}\langle B,S\rangle$, ויהא $a\in A$. נסמן $g=f|_{\overset{a}{A}}$, ו $b=f(a)$. הוכח: $\left\langle\overset{a}{A},R\right\rangle\overset{g}{\cong}\left\langle\overset{b}{B},S\right\rangle$.

יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים טובים. ננסה להבין כיצד ניתן לבנות איזומורפיזם בין רישא (גדולה ככל האפשר) של A לרישא של B.

א. יהיו a_0 האיבר הראשון ב A, ו b_0 האיבר הראשון ב B. אזי ברור ש $\langle\{a_0\},R\rangle\cong\langle\{b_0\},S\rangle$.

ב. יהיו a_1 האיבר הראשון ב $A\backslash\{a_0\}$, ו b_1 האיבר הראשון ב $B\backslash\{b_0\}$ (נניח שהקבוצות לא ריקות). אזי $\langle\{a_0,a_1\},R\rangle\cong\langle\{b_0,b_1\},R\rangle$ (למה?).

ג. נניח שהמשכנו עד למצב $\langle\{a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\},R\rangle\cong\langle\{a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\},S\rangle$. יהיו a_n האיבר הראשון ב $A\backslash\{a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\}$, ו b_n האיבר הראשון ב $B\backslash\{b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\}$ (שוב אנו מניחים שהקבוצות לא ריקות). אזי קל לראות ש $\langle\{a_0,a_1,\ldots,a_n\},R\rangle\cong\langle\{b_0,b_1,\ldots,b_n\},S\rangle$.

ד. נניח ש $\langle\{a_0,a_1,a_2,\ldots\},R\rangle\cong\langle\{b_0,b_1,b_2,\ldots\},S\rangle$. יהיו a_ω האיבר הראשון ב $A\backslash\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$, ו b_ω האיבר הראשון ב $B\backslash\{b_0,b_1,b_2,\ldots\}$. אזי $\langle\{a_0,a_1,\ldots\}\cup\{a_\omega\},R\rangle\cong\langle\{b_0,b_1,\ldots\}\cup\{b_\omega\},S\rangle$ (מדוע?).

ה. יהיו $a_{\omega+1}$ האיבר הראשון ב $A\backslash(\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}\cup\{a_\omega\})$, ו $b_{\omega+1}$ האיבר הראשון ב $B\backslash(\{b_0,b_1,b_2,\ldots\}\cup\{b_\omega\})$. אזי $\langle\{a_0,a_1,\ldots\}\cup\{a_\omega,a_{\omega+1}\},R\rangle\cong\langle\{b_0,b_1,\ldots\}\cup\{b_\omega,b_{\omega+1}\},S\rangle$.

לכן אפשר להמשיך את התהליך עוד ועוד, "עד שאחת הקבוצות נגמרת". הרעיון הפורמאלי העומד מאחורי תהליך זה מופיע בתרגיל הבא.

3.4 תרגיל. יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים טובים, ויהיו $x\in A,y\in B$ כך ש $\langle\overset{x}{A},R\rangle\cong\langle\overset{y}{B},S\rangle$. הוכח ש $\langle\overset{x}{A}\cup\{x\},R\rangle\cong\langle\overset{y}{B}\cup\{y\},S\rangle$. הראה שכל אחד מהסעיפים בתיאור הנ"ל הוא מקרה פרטי של עובדה זאת.

רעיון זה הוא המפתח להוכחת המשפט הבא.

3.5 תרגיל (**משפט על השוואת סדרים טובים**).* יהיו $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$ סדרים טובים. הוכח שבדיוק אחת מהטענות הבאות מתקיימת:

(1) $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$.

(2) קיים $b\in B$ יחיד שעבורו $\langle A,R\rangle\cong\langle\overset{b}{B},S\rangle$.

(3) קיים $a\in A$ יחיד שעבורו $\langle\overset{a}{A},R\rangle\cong\langle B,S\rangle$.

[הדרכה: א. היעזר בתרגילים קודמים להראות שלא ייתכן אף אחד מהצירופים $(1)\wedge(2),(1)\wedge(3),(2)\wedge(3)$.

ב. הגדר $f=\{\langle x,y\rangle : \langle\overset{x}{A},R\rangle\cong\langle\overset{y}{B},S\rangle\}$. הראה שזוהי פונקציה חח"ע.

ג. הראה ש f שומרת סדר, ולכן $\mathrm{dom}(f)\overset{f}{\cong}\mathrm{im}(f)$.

ד. הוכח שאם $x\in\mathrm{dom}(f)$, אז $\overset{x}{A}\subseteq\mathrm{dom}(f)$, והסק שאם $y\in\mathrm{im}(f)$, אזי $\overset{y}{B}\subseteq\mathrm{im}(f)$.

ה. הראה שאם $\mathrm{dom}(f)=A$, אז בהכרח מתקיימת תכונה (1) או תכונה (2).

ו. הראה שאם $\mathrm{dom}(f)\neq A$, אזי מתקיימת תכונה (3).]

4 עיקרון הסדר הטוב

היה נחמד אילו יכלנו למצוא סדר טוב על כל קבוצה נתונה (*תחשבו למשל על קבוצת המספרים הממשיים* $\mathbb{R}$ – *האם אתם יכולים למצוא סדר טוב על קבוצה זאת?*). להלן הצעה לאקסיומה שתבטיח זאת.

עיקרון הסדר הטוב. לכל קבוצה A קיים סדר טוב R על A.

מסתבר שעיקרון זה שקול לאקסיומת הבחירה (*ובפרט אין צורך להוסיפו כאקסיומה לרשימת האקסיומות*). בינתיים נראה רק שאקסיומת הבחירה נובעת ממנה.

4.1 תרגיל. הוכח שאקסיומת הבחירה נובעת מאקסיומת הסדר הטוב. [*רמז: תהא נתונה משפחה* F *של קבוצות לא ריקות. לפי אקסיומת הסדר הטוב, יש סדר טוב* R *על* $\cup F$. *תהא* $\varphi(A,a)$ *הנוסחה "*a *הוא האיבר הראשון ב* A *ביחס לסדר* R*". הוכח ש* φ *היא כלל התאמה על* A, *והשתמש בתרגיל על הקשר בין פונקציות לכללי התאמה.*]

פרק ג: סודרים

1 הגדרת סודר

קבוצה x נקראת $\in$**–טרנזיטיבית** אם כל איבר $y\in x$ הוא גם תת–קבוצה של x.

1.1 תרגיל. הוכח שכל אחת מהתכונות הבאות שקולה לכך ש x $\in$–טרנזיטיבית:

א. $\forall y(y\in x\rightarrow y\subseteq x)$.

ב. $\forall z\forall y(z\in y\in x\rightarrow z\in x)$. (מכאן השם "$\in$–טרנזיטיבית")

ג. $\forall y(y\in x\rightarrow y\in\mathcal{P}(x))$.

קבוצה x תיקרא **סודר** (ordinal number, או פשוט ordinal) אם x טרנזיטיבית ו $\langle x,\in\rangle$ סדר טוב. ההגדרה הזאת אינה מדוייקת, כפי שתלמד בתרגיל הבא.

1.2 תרגיל (פרדוקס השייכות). א. הוכח שלא קיימת קבוצה $R=\{\langle x,y\rangle : x\in y\}$. [רמז: הוכח שאם R זאת קיימת, אז קיימת גם קבוצת כל הקבוצות V.]
ב. דני מיודענו שם לב, שההגדרה של סודר בעייתית: כשאנחנו אומרים ש $\langle A,R\rangle$ סדר טוב, דרוש ש R תהיה קבוצה. אבל הסימן $\in$ אינו קבוצה, אז איך אפשר להגיד ש $\langle x,\in\rangle$ סדר טוב? עזור לדני לפתור את הבעיה [רמז: הוכח שקיימת קבוצה $\in_x:=\{\langle y,z\rangle : y\in z\in x\}$. הניסוח הפורמאלי של הגדרתנו יהיה, ש$\langle x,\in_x\rangle$ סדר טוב.]

1.3 תרגיל. הוכח שהקבוצות הבאות הן סודרים:

א. $\emptyset$.

ב. $\{\emptyset\}$.

ג. $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

2 תכונות בסיסיות

אם $\langle x,\in\rangle$ סדר טוב, אז סימן $\in$ הוא גם יחס הסדר על x. כשנרצה להדגיש שאנו משתמשים ב $\in$ כיחס סדר, נכתוב $y<z$ במקום $y\in z$ כאשר $y,z\in x$.

2.1 תרגיל. הוכח:

א. $\emptyset$ היא סודר.

ב. אם $x\neq\emptyset$ סודר, אז $\emptyset\in x$.

ג. אם x סודר, אז לכל $y\in x$, גם y סודר, ולמעשה $y=\overset{y}{x}$.

ד. אם $F\neq\emptyset$ קבוצה כלשהי של סודרים, אזי $\cap F$ סודר. [רמז: תת-קבוצה של סדר טוב היא סדר טוב.]

2.2 תרגיל. הוכח: אם x,y סודרים ו $y\subset x$, אז y הוא האיבר הראשון ב $x\setminus y$.

[הדרכה: יהא z האיבר הראשון ב $x\setminus y$. נראה ש $z=y$.

א. הראה ש $z\subseteq y$: אם $w\in z$, אז $w\in x\ \wedge\ w\notin x\setminus y$.

ב. הראה ש $y\subseteq z$: לכל $w\in y$, $z,w\in x$ ולכן הם ניתנים להשוואה. לא ייתכן ש $w=z$ או $z\in w$, לכן $w\in z$.]

2.3 תרגיל. יהיו x,y סודרים. הוכח:

א. אם $\langle x,\in\rangle\cong\langle y,\in\rangle$, אזי $x=y$. [רמז: יהא $f{:}x\to y$ איזומורפיזם. נראה שלכל $w\in x$, $f(w)=w$ (ולכן $y=\mathrm{im}(f)=x$). אחרת, יהא $z\in x$ הראשון כך ש $f(z)\neq z$. $y\supset f[z]=f[\overset{z}{x}]=\overset{z}{x}=z$, לכן $z\in y$ והוא הראשון ב $y\setminus z$. לכן $z\in f(z)$. יהא $a\in x$ המקור של z. אזי $a\in z$ בעוד ש $f(a)=z\ni f(z)$, בסתירה לשמירת הסדר של f.]

ב. מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות:

(1) $x\in y$,

(2) $y\in x$, או

(3) $x=y$.

[רמז: האפיון היסודי של סדרים טובים.]

2.4 תרגיל. א. הוכח שאם $F\neq\emptyset$ קבוצה של סודרים, אזי יש איבר ראשון ב F. [רמז: יהא $\alpha\in F$, והגדר $D=\{\beta\in F:\beta\in\alpha\}$. אם $D=\emptyset$, אז α ראשון ב F. אחרת, יש ב D איבר ראשון γ, והוא ראשון ב F.]

ב. הוכח שכל קבוצה של סודרים היא סדורה היטב על ידי $\in$.

2.5 תרגיל. תהא A קבוצת סודרים טרנזיטיבית. הוכח ש A סודר.

2.6 תרגיל (הפרדוקס של Burali-Forti). הוכח שאין קבוצה z המכילה את כל הסודרים כאיברים. [רמז: התבונן בתת-הקבוצה $O:=\{x\in z : \text{סודר } x\}$. הראה ש O סודר, ולכן $O\in O$, בסתירה לאנטי-רפלקסיביות של סודרים.]

2.7 תרגיל. יהא $\langle A,R\rangle$ סדר טוב. הוכח שקיים סודר יחיד x כך ש $\langle A,R\rangle\cong\langle x,\in\rangle$.

[הדרכה: א. הראה שהנוסחה $\exists b\ ((\text{סודר } b)\wedge(\overset{a}{A}\cong b))$ היא כלל התאמה על A.

ב. הגדר $B:=\{a\in A : \exists b\ ((\text{סודר } b)\wedge(\overset{a}{A}\cong b))\}$. לכל $a\in B$ יהא $f(a)$ ה b המתאים.

ג. הפעל את אקסיומת ההחלפה לקבלת קבוצה x.

ד. x $\in$-טרנזיטיבית.

ה. x סודר.

ו. $B \overset{f}{\cong} x$.

ז. $B=A$.]

לאור התרגיל האחרון, אפשר להתאים לכל סדר טוב $\langle A,R\rangle$ סודר יחיד α שאיזומורפי לו, כלומר מאפיין את הסדר $\langle A,R\rangle$ בצורה מושלמת. במקרה כזה נכתוב $\alpha=\text{type}(\langle A,R\rangle)$, ונאמר ש α הוא הסודר של $\langle A,R\rangle$.

2.8 תרגיל. יהיו α,β סודרים, כך ש $\langle\alpha,\in\rangle\cong\langle\beta,\in\rangle$. הוכח ש $\alpha=\beta$. [רמז: $\beta=\text{type}(\langle\alpha,\in\rangle)=\alpha$.]

מעתה ואילך, נשתמש באותיות יוניות לסמן סודרים. הסימון $\alpha<\beta$ פירושו $\alpha\in\beta$, והסימון $\alpha\le\beta$ פירושו: $\alpha<\beta$ או $\alpha=\beta$.

2.9 תרגיל. הוכח שלכל סודר α, $\alpha=\{\beta : \beta<\alpha\}$. [רמז: הגדרת "$<$" של סודרים.]

2.10 תרגיל. יהא $\langle A,R\rangle$ סדר טוב. הוכח שלכל $x,y\in A$ כך ש xRy מתקיים $\text{type}(\langle \overset{x}{A},R\rangle)<\text{type}(\langle \overset{y}{A},R\rangle)$. [רמז: $\overset{x}{A}$ איזומורפי לרישא של $\overset{y}{A}$.]

יהא $\langle A,R\rangle$ סדר טוב, ותהא $\emptyset\neq B\subseteq A$. B היא **קו-סופית** ב A אם לכל $a\in A$ יש $b\in B$ כך ש $a\le_R b$.

2.11 תרגיל.* יהא $\langle A,R\rangle$ סדר טוב, ותהא $\emptyset\neq B\subseteq A$ קו-סופית ב A. נניח שקיים סודר α כך שלכל $b\in B$ מתקיים $\text{type}(\langle \overset{b}{A},R\rangle)<\alpha$. הוכח ש $\text{type}(\langle A,R\rangle)\le\alpha$. [רמז: נסמן $\beta=\text{type}(\langle A,R\rangle)$. נניח $\alpha<\beta$, אזי $\alpha\in\beta$ ולכן קיים $a\in A$ כך ש $\overset{a}{A}\cong\alpha$. B קו-סופית ב A, לכן יש $b\in B$ כך ש $a\le_R b$. אזי $\alpha=\text{type}(\langle \overset{a}{A},R\rangle)\le\text{type}(\langle \overset{b}{A},R\rangle)<\alpha$.]

2.12 תרגיל. תהא F קבוצת סודרים. הוכח ש $\cup F$ סודר.

אם F קבוצת סודרים, נסמן $\sup(F):=\cup F$, ואם $F\neq\emptyset$, נסמן $\min(F):=\cap F$.

2.13 תרגיל. תהא $F\neq\emptyset$ קבוצה של סודרים. הוכח ש $\min(F)$ הוא האיבר הראשון ב F.

עבור סודר α, נסמן $S(\alpha):=\alpha\cup\{\alpha\}$.

2.14 תרגיל. יהא α סודר. הוכח:

א. גם $S(\alpha)$ סודר.

ב. $\alpha<S(\alpha)$.

ג. $\forall\beta\ (\beta<S(\alpha)\leftrightarrow\beta\le\alpha)$. (במילים אחרות, $\alpha<\beta\leftrightarrow S(\alpha)\le\beta$, כלומר $S(\alpha)$ הוא הסודר הראשון שגדול מ α.)

סודר מהצורה $S(\alpha)$ נקרא **עוקב**. סודר שאינו עוקב נקרא **גבול**, או **סודר גבולי**.

סודר α נקרא **טבעי** אם לכל $\beta\le\alpha$, $\beta=\emptyset$ או ש β עוקב. סודר שאינו טבעי נקרא **אינסופי**.

2.15 תרגיל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות עבור סודר α:

א. α גבול.

ב. $\alpha=\sup\{\xi : \xi<\alpha\}$. [רמז: נסמן $\beta=\sup\{\xi : \xi<\alpha\}$. $\beta\le\alpha$. אם $\beta<\alpha$, אזי $S(\beta)<\alpha$, בסתירה להגדרת β.]

ג. אם $A\subseteq\alpha$ קו־סופית ב α, אז $\cup A=\alpha$.

2.16 תרגיל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות עבור סודר α:

א. α עוקב.

ב. אם $\beta=\sup\{\xi : \xi<\alpha\}$, אז $\alpha=S(\beta)$.

ג. קיים **איבר אחרון** ב α, כלומר איבר $\beta\in\alpha$ כך שלכל $\gamma\in\alpha$, $\gamma\le\beta$.

2.17 תרגיל. הוכח:

א. אם α טבעי, אז גם $S(\alpha)$ טבעי.

ב. אם $\alpha>0$ טבעי, אז יש β טבעי כך ש $\alpha=S(\beta)$. [רמז: יהא נתון β כך ש $\alpha=S(\beta)$. אזי $\beta<\alpha$.]

2.18 תרגיל. א. הוכח את קיומה של קבוצת הטבעיים ω. [רמז: אקסיומת הקבוצה האינסופית.]

ב. הוכח שהקבוצה ω היא סודר.

ג. הוכח שהקבוצה ω היא הגבול הקטן ביותר שאינו $\emptyset$.

נסמן $0=\emptyset$, $1=S(\emptyset)$, $2=SS(\emptyset)$, ובאופן כללי, $n=\underbrace{SS\cdots S}_{n\ \text{פעמים}}(\emptyset)$. לפי סימון זה, הקבוצה ω מתאימה לקבוצת המספרים הטבעיים המוכרת $\mathbb{N}$, אלא שאנו מכלילים גם את 0 כטבעי.

2.19 תרגיל. א. כתוב במפורש (השתמש בסימנים $\emptyset,\{,\}$ בלבד) את הקבוצות המתאימות למספרים 1, 2 ו 3.

ב. הוכח שלכל מספר טבעי n מתקיים $n=\{0,1,\ldots,n-1\}$.

המספרים הטבעיים שהגדרנו מקיימים את התכונות המוכרות של $\mathbb{N}$.

2.20 תרגיל (תכונות Peano**)**. הוכח את התכונות הבאות של ω:

א. $0\in\omega$.

ב. לכל $n,m\in\omega$ שונים, $S(n)\neq S(m)$.

ג. **עיקרון האינדוקציה:** אם $X\subseteq\omega$, ומתקיים $0\in X$ וכן לכל $n\in X$ גם $S(n)\in X$, אז $X=\omega$. [רמז: אם $X\subset\omega$, התבונן באיבר הראשון $n\in\omega$ כך ש $n\notin X$. אזי $n=S(m)$ כך ש $m<n$.]

לכל קבוצה A ומספר טבעי n, A^n מסמן את אוסף הפונקציות $s:n\to A$. נסמן גם $A^*=\cup\{A^n : n\in\omega\}$. התרגיל הבא מוכיח שהקבוצות A^n, A^* אכן קיימות.

2.21 תרגיל (סדרות סופיות). תהא $\varphi(n,y)$ התכונה: $\forall s(s\in y\leftrightarrow (\text{פונקציה } s:n\to A))$. (אם y מקיים את התכונה $\varphi(n,y)$, נראה $y=A^n$.)

א. הוכח שלכל n קיים y כך שמתקיימת התכונה $\varphi(n,y)$ (ולכן קיימת הקבוצה A^n). [רמז: $y\subseteq\mathcal{P}(n\times A)$.]

ב. הסבר מדוע φ היא כלל התאמה על ω.

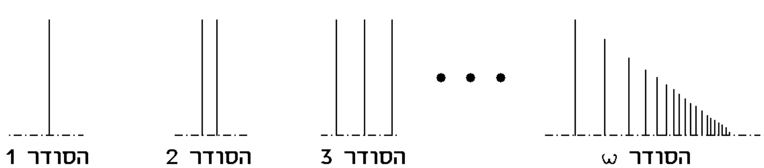
ג. הוכח את קיום הקבוצה A^*. [רמז: אקסיומת ההחלפה.]

2.22 תרגיל. מצא מיפוי בין A^1 ל A ובין A^2 ל $A\times A$.

עבור $a_0, \dots, a_{n-1}\in A$, נסמן ב $\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$ את הפונקציה $s:n\to A$ המקיימת $s(0)=a_0, \dots, s(n-1)=a_{n-1}$. עבור $n=2$, אנו מזהים (אם זה לא גורם בלבול) את A^2 עם $A\times A$.

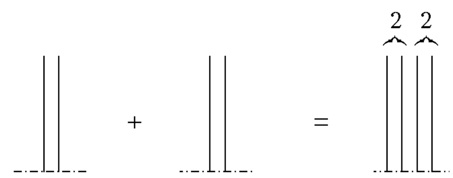
3 חיבור של סודרים

אפשר לחשוב על סודר α כעל רצף של עמודי חשמל, כאשר ככל שהעמוד שמאלי יותר הוא קטן יותר מבחינת הסדר $>$ על α. להלן מספר דוגמאות:

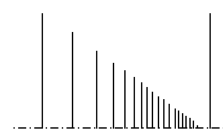


את חיבור הסודרים $\alpha+\beta$ נרצה להגדיר בצורה שתתאים לציור שבו מופיע הציור של הסודר α ומימינו

הציור של הסודר β. לפי זה יצא, למשל, ש $2+2=4$:



בעוד שהסודר של $\omega+1$ נראה כך:



נשים לב שבניגוד ל ω, בסודר $\omega+1$ יהיה איבר אחרון.

3.1 תרגיל. א. נמק, בעזרת הציור הנ"ל, מדוע $\omega<\omega+1$.

ב. צייר את הסודר של $\omega+1$, והראה ש $\omega=\omega+1$. (לכן החיבור לא "חילופי".)

ג. צייר את הסודר של $\omega+\omega$.

עכשיו נגדיר את החיבור של סודרים $\alpha+\beta$ בצורה מדוייקת. המוטיבאציה היא שאנו רוצים, כמו בציורים הנ"ל, סדר טוב שמכיל משהו שאיזומורפי ל α ואחריו משהו שאיזומורפי ל β. לשם כך, אנו מעוניינים לקחת עותקים של α ו β שהם **זרים** (שים לב שפרט למקרה שאחד מהם 0, α ו β אינם זרים). אחת הדרכים הפשוטות לעשות זאת היא לקחת את $\{0\}\times\alpha=\{\langle 0,x\rangle : x\in\alpha\}$ בתור עותק של α, ואת $\{1\}\times\beta=\{\langle 1,y\rangle : y\in\beta\}$ בתור עותק של β, ולהגדיר שזוג סדור עם רכיב שמאלי 1 תמיד גדול מזוג סדור עם רכיב שמאלי 0.

יהיו נתונים סודרים α,β. נגדיר **סדר מילוני** (**לקסיקוגרפי**) lex על $(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\beta)$ בצורה הבאה:

- $\langle 0,x\rangle<_{lex}\langle 1,y\rangle$ לכל $x\in\alpha,y\in\beta$.
- אם $x<y$, אז $\langle 0,x\rangle<_{lex}\langle 0,y\rangle$ וכן $\langle 1,x\rangle<_{lex}\langle 1,y\rangle$.

3.2 תרגיל. הוכח ש lex סדר טוב על $(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\beta)$.

לשם קצרנות, נכתוב $\alpha\uplus\beta$ לציין את האיחוד של העותקים הזרים: $\alpha\uplus\beta=(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\beta)$.

לאור התרגיל האחרון, נוכל להגדיר $\alpha+\beta := \mathrm{type}(\langle\alpha\uplus\beta, lex\rangle)$.

3.3 תרגיל. הוכח: $1+1=2$.

3.4 תרגיל. הוכח, הפעם בצורה מדוייקת, את הטענה $1+\omega=\omega<\omega+1$.

3.5 תרגיל (נייטרליות 0). הוכח שלכל סודר α מתקיים $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$.

3.6 תרגיל (אסוציאטיביות חיבור סודרים). יהיו α,β,γ סודרים. הוכח: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

[הדרכה: נוכיח ששני האגפים איזומורפיים לקבוצה $(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\beta)\cup(\{2\}\times\gamma)$, כאשר היא מסודרת בצורה מילונית.

א. יהי $\delta=\beta+\gamma$. אזי $\langle\delta,\in\rangle\overset{f}{\cong}\langle\beta\uplus\gamma, lex\rangle$. כעת, $\langle\alpha+\delta,\in\rangle\cong\langle\alpha\uplus\delta, lex\rangle$.

ב. נגדיר פונקציה $g:\alpha\uplus\delta\to\alpha\uplus(\beta\uplus\gamma)$ ע"י:

$$\begin{array}{rcll} g(0,a) & = & \langle 0,a\rangle, & a\in\alpha \\ g(1,d) & = & \langle 1,f(d)\rangle, & d\in\delta \end{array}.$$

אזי g איזומורפיזם סדר, כאשר התחום והטווח של g מסודרים מילונית.

ג. מתקיים: $\mathrm{im}(g)=\alpha\uplus(\beta\uplus\gamma)=(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times(\{0\}\times\beta))\cup(\{1\}\times(\{1\}\times\gamma))$.

נגדיר $h:\mathrm{im}(g)\to(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\beta)\cup(\{2\}\times\gamma)$ ע"י:

$$\begin{array}{rcll} h(0,a) & = & \langle 0,a\rangle, & a\in\alpha \\ h(1,\langle 0,b\rangle) & = & \langle 1,b\rangle, & b\in\beta \\ h(1,\langle 1,c\rangle) & = & \langle 2,c\rangle, & c\in\gamma \end{array}.$$

אזי h איזומורפיזם.

ד. לסיכום: $\langle\alpha+(\beta+\gamma),\in\rangle=\langle\alpha+\delta,\in\rangle\cong\langle\mathrm{im}(g), lex\rangle\cong\langle(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\beta)\cup(\{2\}\times\gamma), lex\rangle$.

ה. הוכחת העובדה שאגף ימין איזומורפי לאותה קבוצה זהה.]

3.7 תרגיל. יהיו α,β סודרים. הוכח:

א. $\alpha+1=S(\alpha)$. (ובפרט, $\alpha+1$ הוא הסודר הראשון הגדול מ α.)

ב. $\alpha+S(\beta)=S(\alpha+\beta)$.

ג. אם $\alpha<\beta$, אז לכל סודר γ, $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$. [רמז: הראה שהסדר המגדיר את $\gamma+\alpha$ איזומורפי לרישא של הסדר המגדיר את $\gamma+\beta$.]

ד. אם $\alpha<\beta$, אז לכל סודר γ, $\alpha+\gamma\le\beta+\gamma$. האם אפשר לכתוב "$<$" במקום "$\le$"?

3.8 תרגיל. יהיו α סודר כלשהו ו β גבול. הוכח:

א. אם β גבול, אז $\alpha+\beta=\sup\{\alpha+\xi : \xi<\beta\}$. [רמז: לכל $\xi<\beta$, נסמן ב $f_\xi:\alpha+\xi\to\alpha\uplus\xi$ את האיזומורפיזם המתאים. אזי $\xi<\eta<\beta$, אזי $f_\xi\subseteq f_\eta$. לכן, $f=\bigcup\{f_\xi : \xi<\beta\}$ היא פונקציה עם תחום $\bigcup\{\alpha+\xi : \xi<\beta\}$, ותמונה $\bigcup\{\alpha\uplus\xi : \xi<\beta\}=\alpha\uplus\beta$. הראה שהיא איזומורפיזם.]

ב. לכל $\alpha<\delta<\alpha+\beta$ קיים $\xi<\beta$ כך ש $\delta=\alpha+\xi$. [רמז: δ איזומורפי לרישא של $\alpha\uplus\beta$.]

ג. אם β גבול, אז $\alpha+\beta$ גבול.

3.9 תרגיל. יהא α סודר אינסופי. הוכח:

א. $1+\alpha=\alpha$. [רמז: $1+\alpha=\text{type}(\langle 1\uplus\alpha, lex\rangle)$. הגדר $h:1\uplus\alpha\to\alpha$ על ידי

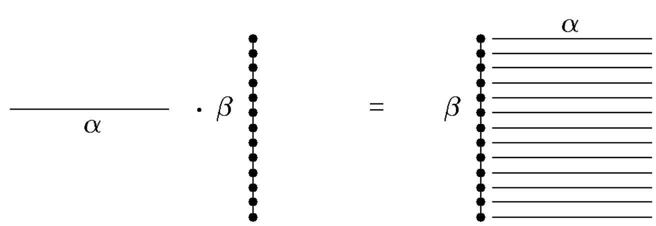
$$\begin{array}{rcll} h(0,0) & = & 0 & \\ h(1,a) & = & S(a), & a<\omega \\ h(1,a) & = & a & \omega\le a \end{array}.$$

הראה ש h איזומורפיזם סדר.]

ב. הוכח שלכל n טבעי מתקיים $n+\alpha=\alpha$. [רמז: עיקרון האינדוקציה על ω.]

4 כפל סודרים

הבה נגדיר כפל של סודרים. הרעיון הוא, שבכפל $\alpha\cdot\beta$ אנחנו סופרים β עותקים של α.



לפי זה, נגדיר **סדר מילוני** R על $\beta\times\alpha$ לפי:

- אם $\delta<\eta<\beta$, אז $\langle\delta,\gamma\rangle R\langle\eta,\xi\rangle$ לכל $\gamma,\xi<\alpha$.
- $\langle\delta,\gamma\rangle R\langle\delta,\xi\rangle \leftrightarrow \gamma<\xi$ לכל $\gamma,\xi<\alpha,\delta<\beta$.

4.1 תרגיל. הוכח שלכל שני סודרים α,β, הסדר המילוני הוא סדר טוב על $\beta\times\alpha$.

לאור התרגיל האחרון, נגדיר $\alpha\cdot\beta = \text{type}(\langle\beta\times\alpha,\text{R}\rangle)$, כאשר R הוא הסדר המילוני על $\beta\times\alpha$.

4.2 תרגיל. א. הוכח: $2\cdot 2=4$.

ב. הוכח: $2\cdot\omega\neq\omega\cdot 2$. [רמז: $2\cdot\omega=\omega\neq\omega+\omega=\omega\cdot 2$.]

4.2 תרגיל. הוכח שלכל n טבעי, $n\cdot\omega=\omega$. [רמז: עכשיו כבר מותר להיעזר בתכונות של מספרים טבעיים.]

4.3 תרגיל (אסוציאטיביות הכפל). יהיו α,β,γ סודרים. הוכח: $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$.

4.4 תרגיל (נייטריליות 1). הוכח שלכל סודר α, $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$.

4.5 תרגיל (פילוג משמאל). יהיו α,β,γ סודרים.

א. הוכח $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

ב. חשב את $(1+1)\cdot\omega$ ואת $1\cdot\omega+1\cdot\omega$ והסק שהפילוג לא חל מימין. (הֵי, בלי פוליטיקה!)

4.6 תרגיל. יהא $0<\gamma$ סודר. הוכח שלכל זוג סודרים $\alpha<\beta$ מתקיים $\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\beta$, וכן $\alpha\cdot\gamma\leq\beta\cdot\gamma$. הראה שלא ניתן להחליף את הסימן $\leq$ בסימן $<$.

4.7 תרגיל. יהא $0<\alpha$ סודר כלשהו, ותהא F קבוצה לא ריקה של סודרים. הוכח: $\sup\{\alpha\cdot\xi : \xi\in F\}=\alpha\cdot\sup(F)$. [רמז: דומה להוכחה ש $\alpha+\beta=\sup\{\alpha+\xi : \xi<\beta\}$ כאשר β גבול.]

5 מחלקות, נסיגה, וחזקות של סודרים

כמו שראינו בתחילת החוברת, לא לכל נוסחה φ קיימת קבוצה $\{x : \varphi(x)\}$. בכל אופן, נוח להשתמש בסימונים כאלה לשם מוטיבאציה. לאוספים מהצורה $\{x : \varphi(x)\}$, שאינם בהכרח קבוצות, נקרא **מחלקות**. מחלקה שאינה קבוצה תיקרא **מחלקה–ממש**. נשתמש באותיות מודגשות לסמן מחלקות. למשל, נסמן:

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{V} & = & \{x : x=x\}\\ \mathbf{ON} & = & \{x : \text{סודר } x\}\end{array}$$

5.1 תרגיל. א. הוכח שהמחלקות $\mathbf{V},\mathbf{ON}$ הן מחלקות של ממש.

ב. נסמן $\in=\{\langle x,y\rangle : x\in y\}$. הוכח: $\in\subseteq\mathbf{V}\times\mathbf{V}\setminus\{\emptyset\}$, והראה ש $\in$ היא מחלקה של ממש.

כל דיון על מחלקות אפשר לתרגם לדיון פורמאלי על נוסחאות.

5.2 תרגיל. תהא φ נוסחה, ותהא $\mathbf{A}=\{x : \varphi(x)\}$. כתוב את הטענה (הלא פורמאלית) $x\in\mathbf{A}$ כנוסחה של תורת הקבוצות.

על מחלקות לא ניתן להפעיל את האקסיומות וההגדרות בצורה ישירה (כי הן לא קבוצות), אולם ניתן להפעילן בצורה עקיפה, כמו בתרגיל הבא.

5.3 תרגיל. א. הוכח שהחיתוך של מחלקה עם קבוצה הוא קבוצה.

ב. תהא $\mathbf{A}$ מחלקה של ממש, ותהא $\mathbf{B}$ מחלקה כך ש $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$. הוכח ש $\mathbf{B}$ מחלקה של ממש.

5.4 תרגיל (אינדוקציה טרנספיניטית). א. הוכח שבכל מחלקה $\emptyset\neq C\subseteq ON$ יש איבר ראשון (ביחס ל $\in$).

ב. תהא φ תכונה כך שלכל סודר α מתקיים: $(\forall\beta<\alpha\varphi(\beta))\rightarrow\varphi(\alpha)$. הוכח שלכל סודר α מתקיים $\varphi(\alpha)$.

ג. תהא φ תכונה כך שמתקיים:

1. $\varphi(0)$.
2. לכל α, $\varphi(\alpha)\rightarrow\varphi(\alpha+1)$.
3. לכל גבול α, אם לכל $\beta<\alpha$ מתקיים $\varphi(\beta)$, אז $\varphi(\alpha)$.

הוכח שלכל סודר α מתקיים $\varphi(\alpha)$.

פעולה $F:A\rightarrow B$ היא כלל המתאים לכל $a\in A$ $b\in B$ יחיד (במקרה זה נכתוב $F(a)=b$). בדומה לפונקציות רגילות, נאמר שהפעולה F היא **חד-חד ערכית** אם $F(a)=F(b)\rightarrow a=b$. נסמן $im(F)=\{F(a)\ :\ a\in A\}$. F **על** אם $im(F)=B$.

5.5 תרגיל. תהא $F:A\rightarrow B$ פעולה. הוכח:

א. אם $X\subseteq A$ קבוצה, אז $\{F(x)\ :\ x\in X\}$ קבוצה.

ב. אם B קבוצה, אז גם $im(F)$ קבוצה.

ג. אם F חד-חד ערכית, אז: A מחלקה של ממש $\Leftrightarrow$ $im(F)$ מחלקה של ממש. [רמז: $F^{-1}:im(F)\rightarrow A$ פעולה שהיא על, ואם $im(F)$ קבוצה, אזי אפשר להשתמש באקסיומת ההחלפה.]

לעתים אנחנו מעוניינים להגדיר פונקציה g על סודרים בצורה "אינדוקטיבית" (או "רקורסיבית"), על ידי כלל נסיגה מסויים, כך שערך הפונקציה g על α יוגדר באמצעות הערכים שלה מתחת ל α, על פי כלל קבוע מראש F. התרגיל הבא מציג את המשפט שמאפשר לעשות זאת. עבור פונקציה או כלל התאמה g עם תחום המכיל סודר α, נסמן $g|_\alpha=\langle g(\beta)\ :\ \beta<\alpha\rangle$. למשל, $g|_5=\langle g(0),g(1),\ldots,g(4)\rangle$.

5.6 תרגיל.* א. **הגדרה באינדוקציה טרנספיניטית מתחת לסודר** δ: תהא $F:V\rightarrow V$ פעולה, ויהא δ סודר. הוכח שקיימת פונקציה יחידה g עם תחום δ כך שלכל $\alpha<\delta$ מתקיים $g(\alpha)=F(\langle g(\beta)\ :\ \beta<\alpha\rangle)$.

ב. **הגדרה באינדוקציה טרנספיניטית על** ON: תהא $F:V\rightarrow V$ פעולה. הוכח שקיימת פעולה יחידה $G:ON\rightarrow V$ כך שלכל α, $G(\alpha)=F(\langle G(\beta)\ :\ \beta<\alpha\rangle)$.

ג. **הגדרה באינדוקציה טרנספיניטית על ON, גירסה 2**: תהא $F:V\rightarrow V$ פעולה. נקבע קבוצה x_0. הוכח שקיימת פעולה יחידה $G:ON\rightarrow V$ המקיימת:

1. $G(0)=x_0$.
2. לכל סודר α, $G(\alpha+1)=F(G(\alpha))$.
3. לכל סודר גבולי α, $G(\alpha)=F(\langle G(\beta)\ :\ \beta<\alpha\rangle)$.

[הדרכה עבור (ב): א. את היחידות אפשר להוכיח באינדוקציה טרנספיניטית.

ב. עבור סודר δ, נקרא ל g δ–קירוב אם g פונקציה עם תחום δ, כך שלכל $\alpha<\delta$ מתקיים $g(\alpha)=\mathbf{F}(\langle \mathbf{G}(\beta) : \beta<\alpha\rangle)$ (התרגיל הקודם מראה שקיים δ–קירוב). הוכח שאם g הוא δ–קירוב, ו $\tilde{g}$ הוא $\tilde{\delta}$–קירוב, אז $g|_{\delta\cap\tilde{\delta}}=\tilde{g}|_{\delta\cap\tilde{\delta}}$.

ג. לכל α, נקבע $\alpha<\delta$ ו g δ–קירוב, ונגדיר את $\mathbf{G}(\alpha)$ להיות הערך $g(\alpha)$.]

5.7 תרגיל. הוכח שקיימת פונקציה יחידה $g:\omega\to\omega$ המקיימת $g(0)=1$ ולכל n טבעי, $g(n+1)=(n+1)\cdot g(n)$ (זאת פונקציית העצרת המפורסמת, $n!$).

[הדרכה: אינדוקציה מתחת ל ω ("אינדוקציה על n"):

א. נגדיר פעולה $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ בצורה הבאה:

$$\mathbf{F}(s)=\begin{cases} n\cdot s(n-1) & s \text{ פונקציה עם תחום } 0<n \\ 1 & s=\emptyset \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}.$$

ב. לכן, לפי המשפט קיימת פונקציה יחידה g עם תחום ω כך שלכל $n<\omega$ מתקיים:

$$g(n)=\mathbf{F}(\langle g(k) : k<n\rangle)=\begin{cases} n\cdot g(n-1) & 0<n \\ 1 & n=0 \end{cases}.$$

זהו.]

בדרך כלל, אין צורך לרדת לרמת פירוט כבפתרון התרגיל האחרון. דוגמה חשובה לפעולה שקל להגדיר באינדוקציה טרנספיניטית היא **חזקות של סודרים**: לכל סודר α, נגדיר את α^β באינדוקציה טרנספיניטית על β (שים לב: לכל α קבוע, אנו מגדירים פעולה על β):

1. $\alpha^0=1$.
2. $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$.
3. אם β גבול, אז $\alpha^\beta=\sup\{\alpha^\xi : \xi<\beta\}$.

5.7 תרגיל. א. הוכח ש $2^2=4$.

ב. הוכח (כאן מותר להשתמש בכל התכונות של מספרים טבעיים) ש $2^\omega=\omega$. (בהמשך נדבר על חזקות של אונים, ושם התוצאה לגמרי אחרת)

5.8 תרגיל. הוכח: $\sup\{k^{(k-1)^{(k-2)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{2^\omega}}}}}}} : 2\leq k<\omega\} = \omega$, כאשר סדר הפעולות הוא מלמעלה למטה, כלומר $4^{3^{2^\omega}}=4^{(3^{(2^\omega)})}$.

5.9 תרגיל. יהיו נתונים סודרים α,β,γ. הוכח:

א. $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$. [רמז: אינדוקציה על γ. חלק בין המקרים ש γ עוקב וגבול.]

ב. $(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$. [רמז: כנ"ל, והיעזר ב(א).]

5.10 תרגיל.* יהא α סודר גבולי. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. לכל $\beta,\gamma<\alpha$ **מתקיים** $\beta+\gamma<\alpha$.

ב. לכל $\beta<\alpha$, $\beta+\alpha=\alpha$.

ג. לכל $A\subseteq\alpha$ **מתקיים** $\mathrm{type}(\langle A,\in\rangle)=\alpha$, **או** $\mathrm{type}(\langle\alpha\setminus A,\in\rangle)=\alpha$.

ד. קיים סודר δ כך ש $\alpha=\omega^{\delta}$.

סודר המקיים את התכונות שבתרגיל האחרון נקרא **אי-פריק**. סודר α נקרא **סודר**-ϵ **אם** $\omega^{\alpha}=\alpha$.

5.11 תרגיל. נגדיר באינדוקציה על ω: $\alpha_0=\omega$, $\alpha_{n+1}=\omega^{\alpha_n}$. **נסמן** $\epsilon=\sup\{\alpha_n : n<\omega\}$.

א. הוכח ש $\omega^{\epsilon}=\epsilon$.

ב. הוכח ש ϵ הוא הסודר-ϵ הראשון. (כלומר לכל $\alpha<\epsilon$, $\omega^{\alpha}\neq\alpha$.)

6 פעולות חשבוניות נוספות על סודרים (סעיף רשות)

עובדה מאד משעשעת היא, שאפשר להגדיר על סודרים (גם אינסופיים!) פעולות של חיסור וחילוק עם שארית.

6.1 תרגיל. הוכח שלכל זוג סודרים $\alpha\leq\beta$ קיים סודר יחיד γ כך ש $\alpha+\gamma=\beta$. [ראה: אינדוקציה טרנספיניטית על β.]

לאור התרגיל הנ"ל, אפשר להגדיר, כאשר $\alpha\leq\beta$, את ה**חיסור** $\alpha-\beta$ להיות הסודר γ המקיים $\alpha+\gamma=\beta$.

6.2 תרגיל. חשב את הסודרים הבאים:

א. $2-1$.

ב. $\omega-1234$.

ג. $\omega\cdot 7-\omega+5\cdot\omega$.

6.3 תרגיל. **א.** יהא α סודר איפריק. הוכח שלכל $\beta<\alpha$, $\alpha-\beta=\alpha$.

ב. חשב: $\omega^3-(\omega^2\cdot 7+\omega\cdot 5-13)$.

באופן דומה להגדרת חיסור, התרגיל הבא מגדיר חילוק עם שארית.

6.3 תרגיל. יהיו $0<\alpha\leq\beta$ סודרים. הוכח שקיים זוג סודרים יחיד δ,ξ כך ש $\xi<\alpha$ ומתקיים $\beta=\alpha\cdot\delta+\xi$.

במקרה המתואר בתרגיל האחרון, אפשר לומר ש**המנה** המתקבלת מחילוק β ב α היא δ, ו**השארית** היא ξ.

6.4 תרגיל. חשב את המנה ואת השארית המתקבלים מחלוקת הסודרים הבאים:

א. $7/2$.

ב. $\omega/3$.

ג. $(\omega\cdot7)/(\omega\cdot3+2)$.

כפי שלמדתם (?) בבית הספר, לכל זוג מספרים k,n כך ש $k,n>0$, אפשר **להציג את** k **בבסיס** n, כלומר יש הצגה יחידה מהצורה $k=n^{b_1}a_1+n^{b_2}a_2+\ldots+n^{b_m}a_m$, כאשר $1\leq m$, $b_1>b_2>\ldots>b_m$, ו $1\leq a_1,a_2,\ldots,a_m<n$. קנטור הוכיח שאפשר לעשות דבר דומה גם עבור סודרים אינסופיים, כאשר הם מוצגים בבסיס ω !

6.5 תרגיל (הצורה הנורמלית של סודרים).* יהא $\alpha\neq0$ סודר. הוכח שקיימת הצגה יחידה

$$\alpha=\omega^{\beta_1}\cdot a_1+\ldots+\omega^{\beta_m}a_m,$$

כאשר $1\leq m<\omega$, $\alpha\geq\beta_1>\ldots>\beta_m$, וכן $1\leq a_1,a_2,\ldots,a_m<\omega$.

7 קו-סופיות של סודרים (סעיף רשות)

יהיו α,β סודרים. פונקציה $f:\alpha\to\beta$ היא **קו-סופית** אם הקבוצה $\mathrm{im}(f)$ קו-סופית ב α, כלומר לכל $\gamma<\beta$ יש $\delta<\alpha$ כך ש $\gamma\leq f(\delta)$.

7.1 תרגיל. יהא נתון סודר α. מצא העתקה קו-סופית $f:\alpha\to\alpha$.

התרגיל האחרון אומר, שלכל סודר α קיים סודר β ופונקציה קו-סופית $f:\beta\to\alpha$. לכן, אפשר להגדיר את ה**קו-סופיות** של α, $\mathrm{cf}(\alpha)$, להיות הסודר הראשון β כך שיש פונקציה קו-סופית $f:\beta\to\alpha$.

7.2 תרגיל. יהא α סודר. הוכח ש $\mathrm{cf}(\alpha)\leq\alpha$.

7.3 תרגיל. יהא α סודר. הוכח שקיימת פונקציה $f:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ שהיא שומרת סדר. [רמז: תהא $g:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ קו-סופית. הגדר באינדוקציה על α: $f(\gamma)=\max\{g(\gamma),\sup\{f(\xi)+1 : \xi<\gamma\}\}$.]

7.4 תרגיל. יהא α סודר. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. α עוקב.

ב. $\mathrm{cf}(\alpha)=1$.

ג. $\mathrm{cf}(\alpha)<\omega$.

ד. $\mathrm{cf}(\alpha)$ עוקב. [רמז: כדי להוכיח ש (ד) $\Leftarrow$ (א), היעזר בפונקציה קו–סופית שומרת סדר.]

7.5 תרגיל. יהא β סודר. הוכח:

א. יהא α סודר גבולי כך שיש פונקציה קו–סופית שומרת סדר $f{:}\alpha\to\beta$. אזי $\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{cf}(\beta)$. [רמז: ראשית, הראה ש $\mathrm{cf}(\alpha)\le\mathrm{cf}(\beta)$. כדי לקבל את הכוון השני $\mathrm{cf}(\beta)\le\mathrm{cf}(\alpha)$, תהא $g{:}\mathrm{cf}(\beta)\to\beta$ קו–סופית. לכל $\xi<\mathrm{cf}(\beta)$ הגדר את $h(\xi)$ להיות ה γ הראשון כך ש $g(\xi)<f(\gamma)$. אזי $h{:}\mathrm{cf}(\beta)\to\alpha$ קו–סופית.]

ב. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta))=\mathrm{cf}(\beta)$. [רמז: חלק למקרים ש β עוקב וש β גבול.]

סודר α הוא **רגולרי** אם הוא גבול, ומתקיים $\mathrm{cf}(\alpha)=\alpha$.

7.6 תרגיל. א. יהא α סודר גבולי. הוכח שהסודר $\mathrm{cf}(\alpha)$ הוא רגולרי.

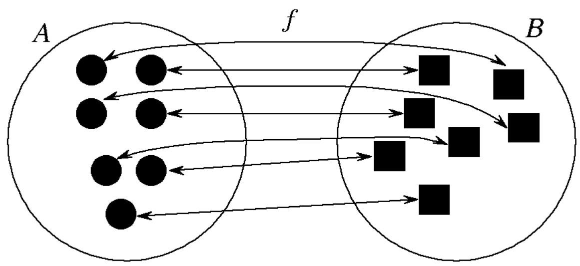
ב. הוכח ש ω הוא רגולרי.

פרק ד: עוצמות ומונים

1 השוואת גודל של קבוצות

שאלה פילוסופית עתיקת יומין היא, מתי שתי קבוצות הן שוות גודל. בתורה מתואר מקרה שבו כל אחד מבני ישראל (למעט פטורים) תרם מחצית השקל בדיוק. אנו משוכנעים שמספר התורמים שווה למספר חצאי-השקלים שנתרמו. מדוע? מנקודת הראות של תורת הקבוצות, הסיבה היא שיש מיפוי (העתקה חד-חד ערכית ועל) בין קבוצת התורמים לקבוצת חצאי-השקלים שנתרמו (איה ההעתקה?). ברעיון הזה אפשר להשתמש כדי להשוות גדלים של קבוצות כלליות, גם אינסופיות.

הקבוצות A,B הן **שוות גודל** (או: **עוצמה**) אם יש מיפוי $f:A\to B$. במקרה זה נכתוב $A\approx B$.



1.1 תרגיל. א. הוכח: $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\approx\{\omega,\omega+1\}$.

ב. נסמן $E=\{2n : n\in\omega\}$. הוכח: $E\approx\omega$. (ω שוות גודל לתת-קבוצה ממש של עצמה!)

יוצא שלא כל התכונות המוכרות לנו במקרים הסופיים ממשיכות להתקיים במקרים האינסופיים. הדבר בא לידי ביטוי בסיפור הבא, הנקרא **פרדוקס מלון אינסוף-החדרים**: במלון "אומגה" יש אינסוף (למעשה, ω) חדרים, הממוספרים $1,2,3,\ldots$. בתקופת התיירות היתה תפוסה מלאה במלון, כלומר כל החדרים היו תפוסים. לפתע הגיע תייר חדש, וביקש להירשם למלון. לאחר שבעל המלון חכך בדעתו (ולמד קצת תורת הקבוצות), הוא העביר את ההחלטה הבאה: לכל n, אורח המשתכן בחדר n יעבור לחדר $n+1$ ("כל אורח יעבור לחדר שאחריו"). כעת, חדר מספר 1 פנוי, ובו ישתכן האורח החדש ...

1.2 תרגיל. תרגם את הסיפור הנ"ל להוכחה של הטענה $\omega\approx 1+\omega$.

1.3 תרגיל. יהיו A,B קבוצות שוות גודל. הוכח שלכל $a\in A, b\in B$ מתקיים $A\setminus\{a\}\approx B\setminus\{b\}$.

עבור קבוצות נתונות A,B, נסמן $^{A}B=\{f : \text{פונקציה } f:A\to B\}$. (יש המסמנים קבוצה זאת כך: B^A, אך סימון זה מבלבל בהקשר של חזקות מונים.)

1.4 תרגיל. הוכח, לכל שתי קבוצות A,B, את קיום הקבוצה ^{A}B.

1.5 תרגיל (מקרים פתולוגיים). א. כתוב במפורש את הקבוצה $^{0}0$.

ב. תהא $A\neq\emptyset$. כתוב במפורש את הקבוצות $^{0}A, {}^{A}0$.

ג. תהא נתונה קבוצה A. כתוב במפורש את הקבוצות ^{1}A, $^{A}1$. [הפרד בין המקרה ש A ריקה למקרה שאינה ריקה.]

מחלקה חשובה של פונקציות היא הפונקציות האופייניות של קבוצה. יהיו נתונות קבוצות $A\subseteq B$. **הפונקציה האופיינית של** A היא הפונקציה $\chi_A : B\to\{0,1\}$, המוגדרת על ידי $\chi_A(x)=1$ אם $a\in A$, ואחרת $\chi_A(x)=0$.

1.6 תרגיל. הוכח שלכל קבוצה B, $\mathcal{P}(B)\approx {}^{B}2$. [רמז: התבונן בהתאמה $A\leftrightarrow\chi_A$.]

1.7 תרגיל. יהיו A,B,C קבוצות כלשהן. הוכח:

א. אם $B\cap C=\emptyset$, אז $^{(B\cup C)}A\approx {}^{B}A\times {}^{C}A$.

ב. $^{C}({}^{B}A)\approx {}^{C\times B}A$.

אם $f:A\to B$ חד-חד ערכית, אז יש ל B תת-קבוצה שהיא שוות גודל ל A.

1.8 תרגיל. תהא $f:A\to B$ חד-חד ערכית. הוכח: $A\approx\mathrm{im}(f)$.

לאור זאת, נסמן $A\preceq B$ אם יש פונקציה חד-חד ערכית $f:A\to B$. אם $A\preceq B$ אבל $B\not\preceq A$, נכתוב $A\prec B$.

1.9 תרגיל. א. הראה שאם $A\subseteq B$, אז $A\preceq B$.

ב. האם ייתכן מקרה שבו $A\subset B$ ובכל זאת $B\preceq A$?

1.10 תרגיל. יהיו A,B,C קבוצות. הוכח את הטענות הבאות:

א. $A\prec B\ \wedge\ B\preceq C\ \rightarrow\ A\prec C$.

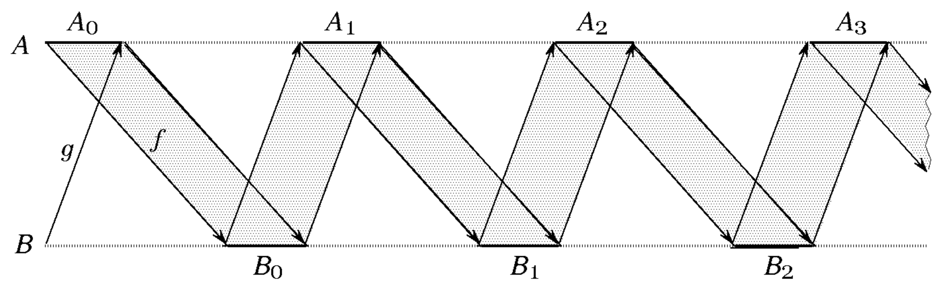
ב. $A\preceq B\ \wedge\ B\prec C\ \rightarrow\ A\prec C$.

1.11 תרגיל. תהא A קבוצה כך ש $\omega\preceq A$. הוכח שלכל x, $A\approx A\cup\{x\}$. [רמז: "מלון ω".]

1.12 תרגיל. הוכח: $A\preceq B\ \Leftrightarrow$ יש פונקציה $f:B\to A$ שהיא על. [רמז: לכיוון $\Rightarrow$, היעזר באקסיומת הבחירה לבנות פונקציה חד-חד ערכית $g:A\to B$. הכיוון $\Leftarrow$ קל, ולכן מצריך את אקסיומת הבחירה.]

1.13 תרגיל (משפט Cantor-Bernstein). הוכח (מבלי להשתמש באקסיומת הבחירה) שאם $A\preceq B$ וכן $B\preceq A$, אזי $A\approx B$.

[הדרכה: נתאר את ההוכחה ב"שיטת המראות", שקיבלה את שמה מהציור הבא, הנראה כמו מהלך של אלומות אור בין שתי מראות:



רעיון ההוכחה דומה לזה של פרדוקס מלון אינסוף החדרים. אנחנו רוצים להתאים לכל אבר של A ("אורח") אבר יחיד של B ("חדר") כך שכל אברי B יכוסו ("כל החדרים יהיו תפוסים").

אם $g:B\to A$ חד-חד ערכית, אזי g^{-1} משכנת תת-קבוצה של A, נסמנה $\tilde{A}$, ב B. אזי כך כל החדרים ב B תפוסים, ועדיין נותר לשכן את קבוצת האורחים הנותרים $A_0=A\setminus\tilde{A}$. היינו רוצים לשכנם בקבוצה $B_0=f[A_0]$, אבל היא תפוסה. הפתרון זהה לזה שבמלון אינסוף החדרים. נסמן ב A_1 את קבוצת האורחים הנמצאים ב B_0 (כלומר $A_1=g[B_0]$), ונעביר אותם ל $B_1=f[A_1]$, כאשר את קבוצת האורחים $A_2=g[B_1]$ ששוכנו ב B_1 נעביר ל $B_2=f[A_2]$, וכו'. לסיכום, לכל n, האורחים ששוכנו בהתחלה ב B_n עוברים ל B_{n+1}, וכך B_0 מתפנה לקלוט את קבוצת האורחים A_0.

פורמאלית, נסמן $\tilde{A}=g^{-1}[B]$ ונגדיר באינדוקציה על n: $A_0=A\setminus\tilde{A}$, $B_0=f[A_0]$, ולכל n, $A_{n+1}=g[B_n]$ ו $B_{n+1}=f[A_{n+1}]$. נגדיר פונקציה $h:A\to B$ על ידי:

$$h(a)=\begin{cases} f(a) & a\in\bigcup\{A_n : n\in\omega\} \\ g^{-1}(a) & \text{אחרת} \end{cases}.$$

הוכח: א. h אכן פונקציה עם תחום A וטווח B (כלומר לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד כך ש $h(a)=b$).

ב. h חד-חד ערכית.

ג. h על.]

אחת התוצאות המפתיעות ביותר של המתמטיקאי קנטור (שהיה, אגב, ממוצא יהודי) היא, שלכל קבוצה נתונה אפשר למצוא קבוצה "יותר גדולה" (גם כאשר הקבוצה "אינסופית", כלומר לכל "אינסוף" יש אינסוף "יותר גדול"!).

1.14 תרגיל (משפט Cantor). הוכח שלכל קבוצה A מתקיים $A\prec\mathcal{P}(A)$. [רמז: תהא $f:A\to\mathcal{P}(A)$ חד-חד ערכית. נגדיר $B=\{a\in A : a\notin f(a)\}$. הראה ש $B\notin\operatorname{im}(f)$: אחרת, $B=f(a)$ לאיזשהו $a\in A$. האם $a\in B$?]

1.15 תרגיל (הפרדוקס של Cantor). הראה, בעזרת משפט קנטור, שאין קבוצה אוניברסלית V. [רמז:

אם V אוניברסלית, אז $\mathcal{P}(V)\subseteq V$ ולכן $\mathcal{P}(V)\preceq V$. אבל $V\prec\mathcal{P}(V)$.]

1.16 תרגיל. הוכח שלכל זוג סודרים $\alpha\le\beta$ מתקיים $\alpha\preceq\beta$.

1.17 תרגיל. יהא α סודר. נסמן $\mathrm{succ}(\alpha)=\{\beta<\alpha : \beta \text{ עוקב}\}$. **הוכח**: $\mathrm{succ}(\alpha)\approx\alpha$. [רמז: טפל בנפרד במקרה ש $\alpha<\omega$. במקרה $\omega\le\alpha$ גבול, היעזר במשפט קנטור–ברנשטיין, עם פונקצית העוקב $S:\alpha\to\mathrm{succ}(\alpha)$. חשוב מה לעשות כאשר $\omega\le\alpha$ עוקב.]

מעקרון הסדר הטוב יוצא, שאפשר להשוות כל שתי קבוצות מבחינת גודל.

1.18 תרגיל. א. יהיו A קבוצה ו α סודר כך ש $A\approx\alpha$. תהא $f:A\to\alpha$ חד–חד ערכית. נגדיר יחס R על A לפי $a<_R b\leftrightarrow f(a)<f(b)$. הוכח ש $\langle A,R\rangle$ סדר טוב.

ב. הוכח (בעזרת עקרון הסדר הטוב) שלכל קבוצה A קיים סודר α כך ש $A\approx\alpha$.

ג. הוכח (בעזרת (ב)) שלכל שתי קבוצות X,Y מתקיים $X\preceq Y$ או $Y\preceq X$.

ד. הסק את **עקרון הטריכוטומיות של** $\prec$: לכל שתי קבוצות X,Y מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות: $X\approx Y$, $X\prec Y$, או $Y\prec X$.

2 עוצמות ומונים

2.1 תרגיל. הוכח (בעזרת עקרון הסדר הטוב) שלכל קבוצה A קיים סודר קטן ביותר α כך ש $A\approx\alpha$. [רמז: הראה שאוסף הסודרים α כך ש $A\approx\alpha$ אינו ריק, והיעזר במשפט מתאים מהפרק על אחלקות.]

לאור תרגיל זה, נגדיר את **העוצמה** (או: **גודל**) של קבוצה A כסודר הקטן ביותר α כך ש $A\approx\alpha$. במקרה זה, נכתוב $|A|=\alpha$. במלים אחרות, העוצמה של קבוצה היא הדרך ה"קומפקטית" ביותר לסדר את הקבוצה.

2.2 תרגיל. הוכח את התכונות הבאות של עוצמה:

א. $A\approx B \iff |A|=|B|$. (ומכאן המונח "שוות עוצמה".)

ב. $A\prec B \iff |A|<|B|$.

ג. $A\preceq B \iff |A|\le|B|$.

ד. לכל קבוצה A, $|A|\approx A$.

ה. לכל סודר α, $|\alpha|\le\alpha$.

סודר α ייקרא **מונה** (cardinal number, או פשוט cardinal) אם $|\alpha|=\alpha$.

2.3 תרגיל. הוכח שלכל קבוצה A, $|A|$ הוא מונה, כלומר $||A||=|A|$.

2.4 תרגיל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. α מונה.

ב. לכל $\beta<\alpha$, $\beta\prec\alpha$.

ג. לכל $\beta\leq\alpha$, אם $\beta\approx\alpha$ אז $\beta=\alpha$.

2.5 תרגיל. לכל זוג סודרים המקיים $|\alpha|\leq\beta\leq\alpha$, מתקיים $|\beta|=|\alpha|$. [רמז: משפט Cantor–Bernstein.]

2.6 תרגיל. יהיו α,β מונים, כך ש $\alpha\approx\beta$. הוכח ש $\alpha=\beta$.

2.7 תרגיל. יהא $n\in\omega$. הוכח:

א. $n\prec n+1$. [רמז: אינדוקציה על n, והשתמש בעובדה שאם $A\approx B$ אז $A\setminus\{a\}\approx B\setminus\{b\}$ לכל $a\in A, b\in B$.]

ב. לכל סודר α: אם $\alpha\approx n$, מתקיים $\alpha=n$.

[הדרכה: נניח בשלילה ש $\alpha\neq n$. אזי בהכרח $\alpha<n$ או $n<\alpha$. במקרה הראשון, $\alpha\prec\alpha+1\leq n$ (מדוע?), לכן $\alpha\prec n$. במקרה השני, $n\prec n+1\leq\alpha$, לכן $n\prec\alpha$.]

2.8 תרגיל. הוכח ש ω מונה, ולכל $n\in\omega$, n מונה.

קבוצה A תיקרא **סופית** אם $|A|<\omega$. אחרת, היא תיקרא **אינסופית**. קבוצה A היא **בָּת מְנִיָּה** אם $|A|\leq\omega$.

2.9 תרגיל. תהא A קבוצה אינסופית ובת–מניה. הוכח: $A\approx\omega$, ולכן אפשר לכתוב את אברי A כך: $\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$. [רמז: עבור החלק השני של השאלה, תהא $f:\omega\to A$ איפוי. לכל $n\in\omega$, נסמן $a_n:=f(n)$.]

יוצא שאפשר "למנות" את אבריה של קבוצה בת מניה: אם הקבוצה סופית, המניה היא כפשוטה. אחרת, המניה היא כ"סדרה אינסופית". זה הרעיון האינטואיטיבי העומד מאחורי השם "בת מניה".

3 חשבון מונים

מקובל להשתמש באותיות κ,λ,μ לציין מונים. על מונים מגדירים פעולות חשבוניות בסיסיות שהתוצאה שלהן היא מונה. עבור מונים κ,λ, נגדיר את **החיבור והכפל** שלהם בצורה הבאה:

- $\kappa\oplus\lambda:=|\kappa\uplus\lambda|=|(\{0\}\times\kappa)\cup(\{1\}\times\lambda)|$.

- $\kappa\otimes\lambda:=|\kappa\times\lambda|$.

בניגוד לפעולות החיבור וכפל של סודרים, הפעולות על מונים הן קומוטטיביות.

3.1 תרגיל. הוכח, בהסתמך על ההגדרות של חיבור וכפל סודרים, שלכל שני מונים κ,λ מתקיים:

א. $\kappa\oplus\lambda=|\kappa+\lambda|$.

ב. $\kappa\otimes\lambda=|\kappa\cdot\lambda|$.

3.2 תרגיל. **א.** יהיו α,β סודרים. הוכח: $|\alpha+\beta|=|\beta+\alpha|=|\alpha|\oplus|\beta|$, וכן $|\alpha\cdot\beta|=|\beta\cdot\alpha|=|\alpha|\otimes|\beta|$.

ב. יהיו κ,λ מונים. הוכח: $\kappa\oplus\lambda=\lambda\oplus\kappa$, וכן $\kappa\otimes\lambda=\lambda\otimes\kappa$.

באופן כללי, חיבור וכפל של מונים נתונים כמונים לא נותן אותה תוצאה כמו חיבור וכפל שלהם כסודרים.

3.3 תרגיל. הוכח:

א. $\omega\oplus1<\omega+1$. [רמז: $\omega\oplus1=|1+\omega|$.]

ב. $\omega\otimes2<\omega\cdot2$. [רמז דומה.]

במקרה של מספרים טבעיים, בכל אופן, חיבורם כסודרים או כמונים ייתן אותה תוצאה.

3.4 תרגיל. הוכח שלכל $n,m\in\omega$ מתקיים $n\oplus m=n+m<\omega$, וכן $n\otimes m=n\cdot m<\omega$. (לכן, חיבור וכפל של טבעיים הם קומוטטיביים.)

[הדרכה: א. הראה שלכל n נתון מתקיים: לכל m, $n+m<\omega$. (אינדוקציה על m.)

ב. הראה, שוב באינדוקציה על m ובעזרת (א), שלכל n נתון מתקיים: לכל m, $n\cdot m<\omega$.

ג. כעת העזר בתכונה, שאם $k\approx\alpha$ כאשר α סודר ו k טבעי, אז $\alpha=k$.]

3.5 תרגיל. כל מונה אינסופי הוא גבול (כסודר). [רמז: אם $\kappa=\alpha+1$, אז $\kappa=|\kappa|=|1+\alpha|=|\alpha|<\kappa$.]

3.6 תרגיל. יהא $\langle A,R\rangle$ סדר טוב, ויהא κ מונה, כך שלכל $a\in A$ מתקיים $|\overset{a}{A}|<\kappa$. הוכח: $|A|\leq\kappa$. [רמז: נסמן $\beta=\mathrm{type}(\langle A,R\rangle)$. $|A|\leq\beta$. אם $\kappa<|A|$, אז $\kappa<\beta$. יהא $f:\beta\to A$ איזומורפיזם סדר. אזי $|\overset{f(\kappa)}{A}|=\kappa$.]

אפשר להשתמש באינדוקציה טרנספיניטית על סודרים כדי להוכיח משפטים על מונים, שכן מונים הם בעצמם סודרים.

3.7 תרגיל.* הוכח שלכל מונה אינסופי κ מתקיים $\kappa\otimes\kappa=\kappa$.

[הדרכה: נשתמש באינדוקציה טרנספיניטית על κ. נניח שלכל מונה $\lambda<\kappa$ מתקיים $\lambda\otimes\lambda=\lambda$. עלינו להוכיח ש $\kappa\otimes\kappa=\kappa$.

א. הראה שלכל סודר $\alpha<\kappa$ מתקיים $\kappa>|\alpha\times\alpha|$.

ב. נגדיר סדר חלקי על $\kappa\times\kappa$ כך: $\langle\alpha,\beta\rangle<_R\langle\gamma,\delta\rangle$ כאשר מתקיימת אחת מהתכונות הבאות:

1. $\max\{\alpha,\beta\}<\max\{\gamma,\delta\}$, או

2. האקסיומות הנ"ל שווה, ובנוסף $\langle\alpha,\beta\rangle$ קודם ל $\langle\gamma,\delta\rangle$ בסדר מילוני.

הראה ש R סדר טוב.

ג. הראה שלכל $\langle\alpha,\beta\rangle\in\kappa\times\kappa$, הרישא מקיימת $\kappa>|\kappa\times\kappa^{\langle\alpha,\beta\rangle}|$.

ה. הסק, בעזרת תרגיל קודם, $|\kappa\times\kappa|\le\kappa$.]

3.8 תרגיל. הוכח שניתן לחלק את ω לאינסוף קבוצות זרות, שכל אחת מהן אינסופית.

3.9 תרגיל. יהיו κ,λ מונים אינסופיים. הוכח:

א. $\kappa\oplus\lambda=\kappa\otimes\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$. [רמז: תרגיל קודם.]

ב. לכל n טבעי, $|{}^n\kappa|=\kappa$.

ג. $|\kappa^*|=\kappa$ (תזכורת: $\kappa^*=\cup\{{}^n\kappa : n<\omega\}$). [רמז: יהיו $f_n:\kappa^n\to\kappa$ חד-חד ערכיות. נגדיר $f=\cup\{f_n : n<\omega\}$ היא פונקציה חד-חד ערכית, אז κ^* לתוך $\omega\times\kappa$.]

3.10 תרגיל. יהא κ מונה אינסופי. נסמן $[\kappa]^n=\{A\subseteq\kappa : |A|=n\}$, וכן $[\kappa]^{<\omega}=\cup\{[\kappa]^n : n<\omega\}$. הוכח:

א. $|[\kappa]^n|=\kappa$.

ב. $|[\kappa]^{<\omega}|=\kappa$.

3.11 תרגיל. מצא מונים $0<\kappa,\lambda,\mu$ כך ש $\lambda<\mu$ ו $\kappa^\lambda=\kappa^\mu$.

3.12 תרגיל. יהא κ מונה אינסופי. הוכח:

א. אם A,B קבוצות כך ש $|A|,|B|<\kappa$, אז $|A\cup B|<\kappa$.

ב. לכל סודר $\alpha<\kappa$, $|\kappa\setminus\alpha|=\kappa$. [רמז: $(\kappa\setminus\alpha)\cup\alpha=\kappa$.]

ג. האם הטענה בסעיף (א) נכונה גם עבור איחוד אינסופי? [רמז: הצג את ω כאיחוד של קבוצות סופיות.]

3.13 תרגיל. יהא κ מונה אינסופי, ונניח שלכל $\alpha<\kappa$, $|X_\alpha|\le\kappa$. הוכח: $|\cup\{X_\alpha : \alpha<\kappa\}|\le\kappa$.

[הדרכה: יהיו נתונות העתקות חד-חד ערכיות $f_\alpha:X_\alpha\to\kappa$.

א. הגדר $f:\cup\{\{\alpha\}\times X_\alpha : \alpha<\kappa\}\to\kappa\times\kappa$ לפי $\langle\alpha,x\rangle\mapsto\langle\alpha,f_\alpha(x)\rangle$. הראה ש f חד-חד ערכית.

ב. הוכח ש $\cup\{X_\alpha : \alpha<\kappa\}\preceq\cup\{\{\alpha\}\times X_\alpha : \alpha<\kappa\}$ (רמז: פונקציה "על").]

מפתיע לחשוב שכל הסודרים שהכרנו עד כה הם בני מניה.

3.14 תרגיל. הוכח שהסודרים $\omega+\omega, \omega\cdot\omega, \omega^\omega$ הם בני מניה. [רמז: תרגיל קודם.]

תהא A קבוצה נתונה. פונקציה f היא **n–מקומית** על A אם $f{:}A^n \to A$. קבוצה $B \subseteq A$ היא **סגורה תחת** f אם $f[B^n] \subseteq B$. פונקציה f נקראת **פונקציה סופמקומית על** A אם קיים n כך ש f היא n–מקומית. יהא $\mathcal{S}$ אוסף של פונקציות סופמקומיות על A. **הסגור** של B תחת $\mathcal{S}$ הוא הקבוצה הקטנה ביותר $C \subseteq A$ כך ש $B \subseteq C$ ו C סגורה תחת כל הפונקציות מ $\mathcal{S}$.

3.15 תרגיל. יהיו $A, \mathcal{S}$ כנ"ל. הוכח שלכל $B \subseteq A$ קיימת הקבוצה C שהיא הסגור של B תחת $\mathcal{S}$. [רמז: $C = \bigcap\{D : B \subseteq D \subseteq A \wedge$ סגורה תחת $\mathcal{S}$ $D\}$.]

3.16 תרגיל. יהא κ מונה אינסופי, ותהא $B \subseteq A$ קבוצה שגודלה אינו עולה על κ. אזי לכל קבוצה של פונקציות סופמקומיות $\mathcal{S}$ על A, הגודל של הסגור של B תחת $\mathcal{S}$ אינו עולה על κ. [רמז: תהי f פונקציה n מקומית על קבוצה X, נסמן ב $f{*}X$ את הקבוצה $f[X^n]$. הגדר באינדוקציה על ω: $C_0 = B$, $C_{n+1} = C_n \cup \{f{*}C_n : f \in \mathcal{S}\}$. הראה ש $C = \bigcup\{C_n : n < \omega\}$ הינו הסגור של B תחת $\mathcal{S}$.]

3.17 תרגיל. הוכח שלכל חבורה אינסופית G יש תת–חבורה מגודל ω. [רמז: התחל מתת–קבוצה כלשהי בגודל ω, וסגור אותה תחת הפעולות של חבורה.]

גם על מונים אפשר לבצע פעולת חזקה מתאימה. יהיו κ, λ מונים. נגדיר את **החזקה** שלהם בצורה הבאה:

$$\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|,$$

3.18 תרגיל. יהא λ מונה אינסופי, ויהא κ מונה כך ש $2 \le \kappa \le \lambda$. אזי $\kappa^\lambda = 2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$. [רמז: ${}^\lambda 2 \approx \mathcal{P}(\lambda)$, ובדוק ${}^\lambda 2 \preceq {}^\lambda\lambda \preceq \mathcal{P}(\lambda\times\lambda) \approx \mathcal{P}(\lambda)$.]

כמו בפעולות האחרות, גם פעולת החזקה של מונים נותנת תוצאות שונות מפעולת החזקה של סודרים.

3.19 תרגיל. יהא α הסודר המתקבל מפעולת החזקה של סודרים 2^ω, ויהא κ המונה המתקבל מפעולת החזקה של מונים 2^ω. הוכח ש $\alpha < \kappa$. [רמז: משפט קנטור.]

3.20 תרגיל. הוכח שלכל n, m טבעיים, החזקה n^m כאשר היא מחושבת כחזקת סודרים שווה לאותה חזקה כאשר היא מחושבת כחזקה של מונים. [רמז: אינדוקציה על m.]

3.21 תרגיל. יהיו κ, λ, σ סודרים. הוכח:

א. $\kappa^{\lambda\oplus\sigma}=\kappa^{\lambda}\otimes\kappa^{\sigma}$.

ב. $(\kappa^{\lambda})^{\sigma}=\kappa^{\lambda\otimes\sigma}$.

[רמז: תרגיל דומה בנושא שוויון גודל של קבוצות.]

4 ה"אָלֶפִים" של קנטור

כמו בסודרים, לכל מונה נתון (גם אינסופי!) קיים מונה יותר גדול.

4.1 תרגיל. יהא נתון מונה κ. הוכח שקיים מונה λ כך ש $\kappa<\lambda$. [רמז: משפט קנטור.]

לכל סודר α, נסמן ב α^{+} את **המונה** הראשון הגדול מ α. מונה κ המקיים $\kappa=\alpha^{+}$ לאיזשהו סודר α ייקרא **מונה עוקב**. אם $\omega\leq\kappa$ ו κ אינו מונה עוקב, נקרא לו **מונה גבולי**. שים לב שהמושגים "סודר עוקב" ו"מונה עוקב" אינם זהים (וכן עבור "גבולי"). התרגיל הבא מראה שמונה עוקב בדרך כלל אינו סודר עוקב.

4.2 תרגיל. א. הוכח שלכל סודר אינסופי α, $\alpha+1<\alpha^{+}$. [רמז: $\alpha+1\approx\alpha\prec\alpha^{+}$.]

ב. הוכח שלכל מספר טבעי n, $n+1=n^{+}$.

4.3 תרגיל. הוכח ש ω הוא מונה גבולי.

4.4 תרגיל. הוכח שלא קיימת קבוצה C המכילה את כל המונים כאיברים. [רמז: $\mathbf{ON}=\cup C$.]

האינטואיציה החריפה של קנטור הובילה אותו לרעיון של "סדרת" עוצמות אינסופיות שכל אחת גדולה מהשניה. לציון אברי סדרה זאת הוא בחר את האות העברית $\aleph$ ("יתכן שקנטור בחר באות זו משום שהיא האות הראשונה במלה "אינסוף", ו"יתכן שסתם משום שזאת האות הראשונה בעברית ...). ההגדרה היא באינדוקציה טרנספיניטית:

(1) $\aleph_0=\omega$.

(2) $\aleph_{\alpha+1}=(\aleph_{\alpha})^{+}$ לכל סודר עוקב $\alpha+1$.

(3) אם α סודר גבולי, אז $\aleph_{\alpha}=\sup\{\aleph_{\xi} : \xi<\alpha\}$.

(הערה: יש כאלו שמעדיפים לכתוב ω_{α} במקום $\aleph_{\alpha}$.)

4.6 תרגיל. הוכח את הטענות הבאות:

א. לכל סודר α, $\aleph_{\alpha}$ הוא מונה. [רמז: אינדוקציה טרנספיניטית על α.]

ב. לכל מונה אינסופי κ קיים סודר α כך ש $\kappa=\aleph_{\alpha}$. [רמז: אינדוקציה טרנספיניטית על κ.]

ג. לכל זוג סודרים $\alpha<\beta$, $\aleph_\alpha<\aleph_\beta$. [רמז: אינדוקציה טרנספיניטית על β.]

ד. לכל סודר α, $\aleph_\alpha$ מונה גבולי $\Leftrightarrow$ α סודר גבולי, וכן: $\aleph_\alpha$ מונה עוקב $\Leftrightarrow$ α סודר עוקב. [רמז: הוכח שאם α עוקב אז $\aleph_\alpha$ עוקב, ואם α גבולי אז $\aleph_\alpha$ מונה גבולי. השאר נובע מההגדרות.]

4.7 תרגיל. הוכח שלכל סודר α מתקיים $\aleph_{\alpha+1}\le 2^{\aleph_\alpha}$. [רמז: משפט קנטור.]

29. סמן $<$, $=$, או $>$ בין העוצמות הבאות, ואם אין ברירה, סמן $\ge$ או $\le$ (בכל מקרה, הוכח את טענותיך):

א. $3\otimes\aleph_0$ $\quad$ $\aleph_0$.

ב. $\aleph$ $\quad$ $\aleph_0^{\aleph}$.

ג. $2^{\aleph}$ $\quad$ $\aleph^{\aleph_0}$.

ד. $\aleph_0^{\aleph}$ $\quad$ $\aleph^{\aleph_0}$.

ה. $\aleph_0\oplus 2\otimes\aleph$ $\quad$ $2\otimes\aleph_0\oplus\aleph$.

ו. $\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}$ $\quad$ $(2^{\aleph_0})^{\aleph}$.

5 עוצמת הרצף

יהיו $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ הקבוצות של המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונליים והממשיים (לפירוט, עיין בנספח).

5.1 תרגיל. הוכח את הטענות הבאות:

א. $|\mathbb{N}|=\aleph_0$. [רמז: $\mathbb{N}\approx\omega$.]

ב. $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$. [רמז: $\mathbb{Z}\approx\{0,1\}\times\mathbb{N}$.]

ג. $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$. [רמז: $\mathbb{Q}\preceq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.]

יוצא איפוא, שקבוצת הרציונליים, שנראית לכאורה "גדולה" יותר מהטבעיים, היא בת-מניה! מה לגבי קבוצת הממשיים?

יהא $0<a<1$ מספר ממשי. נגדיר באינדוקציה סידרה $a_1,a_2,\dots$ על ידי: $a_1=\lceil 10a\rceil$, $a_{n+1}=\lceil 10^{n+1}\cdot a\rceil-10^n a_n$. הסידרה $0.a_1a_2\dots$ תיקרא **הפיתוח העשרוני** של A. מאידך, בהינתן סידרה $\langle a_1,a_2,\dots\rangle\in 10^{\mathbb{N}}$, אפשר להתאים לה את המספר הממשי $(0,1)\ni\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\dots 0.a_1a_2=A$. התאמה זאת היא כמעט חד-חד ערכית.

5.2 תרגיל (פיתוח עשרוני).* תהא $f:10^{\mathbb{N}}\to(0,1)$ הפונקציה המתאימה לסידרה $\langle a_1,a_2,\dots\rangle\in 10^{\mathbb{N}}$ את המספר הממשי $A=0.a_1a_2\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$. יהא $F\subseteq 10^{\mathbb{N}}$ אוסף הסדרות שהן אפס לבסוף, כלומר סדרות $\{a_n\}$ כך שיש N טבעי כך שלכל $N<n$ טבעי מתקיים $a_n=0$. הוכח:

א. f היא על.

ב. $f|_{10^{\mathbb{N}}\setminus F}$ חד־חד ערכית ועל.

ג. $|F|=\aleph_0$.

ד. $|(0,1)|=2^{\aleph_0}$.

ה. לכל $n\in\mathbb{N}$, $|(0,n)|=|(-n,0]|=|(-n,n)|=2^{\aleph_0}$.

ו. $|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$. [ראה: $\mathbb{R}=\bigcup_{n<\omega}(-n,n)$.]

אנו מקבלים, איפוא, קפיצת מדרגה מבחינת עוצמה במעבר מ $\mathbb{Q}$ ל $\mathbb{R}$. השאלה עד כמה העוצמה של $\mathbb{R}$ גדולה מהעוצמה של $\mathbb{Q}$, דהיינו לאיזה $1\le\alpha$ מתקיים $|\mathbb{R}|=\aleph_\alpha$, היתה הבעיה החשובה ביותר בתורת הקבוצות מאז זמנו של קנטור. העוצמה של $\mathbb{R}$ נקראת **עוצמת הרצף**. מפאת חשיבותה, מסמנים $|\mathbb{R}|=\aleph$ (אלף גותי!). במלים אחרות, $\aleph=2^{\aleph_0}$.

עבור $a<b$ ממשיים, נשתמש בסימונים המקובלים עבור קטעים:

- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a\le x\le b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a\le x<b\}$.
- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a<x\le b\}$.
- $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$.

5.3 תרגיל. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $a<b$.

א. יהיו $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש $c<d$. מצא מיפוי $f:(a,b)\to(c,d)$. [ראה: תאמת את זה בבית הספר.]

ב. הוכח: $|[a,b]|=|(a,b)|=|[a,b)|=|(a,b]|$. [ראה: הראה ש $[a,b]\preceq(a,b)$.]

ג. הוכח: $|(a,b)|=2^{\aleph_0}$.

מהתרגיל האחרון נובע, שלכל קבוצה פתוחה שאינה בת מניה יש עוצמה $2^{\aleph_0}$. בפרק על משפט Cantor–Bendixon אנו מראים, שגם לקבוצות סגורות יש תכונה זאת. נשאלת השאלה, האם יש קבוצות של ממשיים $A\subseteq\mathbb{R}$ כך ש $\aleph_0<|A|<2^{\aleph_0}$.

קנטור ניסה, ולא הצליח, למצוא קבוצה X כך ש $\aleph_1<|X|<2^{\aleph_0}$. לפיכך, הוא שיער ש $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, כלומר ש $|\mathbb{R}|=\aleph_1$. השערה זאת נקראת **השערת הרצף**, ומסומנת **CH** (קיצור של Continuum Hypothesis). אם נקבל את השערת הרצף, אזי $|\mathbb{R}|=\aleph_1$ ולכן היא העוצמה הראשונה שגדולה מ $|\mathbb{Q}|$. בשנת 1900 הכין

המתמטיקאי Hilbert רשימה של בעיות מתמטיות חשובות שעל הקהילה המתמטית להתמודד איתן במאה העשרים. הבעיה הראשונה ברשימה היתה: להוכיח את השערת הרצף – או להפריכה (בזמנו טרם נוסחו האקסיומות של תורת הקבוצות, והכוונה היתה להוכחה או הפרכה באופן הרגיל במתמטיקה). ההתקדמות הראשונה בנושא הושגה ב 1939 על ידי המתמטיקאי Gödel, שהראה שהשערת הרצף אינה סותרת את האקסיומות של תורת הקבוצות, ולכן לא ניתן להפריכה. השאלה האם ניתן **להוכיח** את ההשערה היתה הרבה יותר קשה, ונאלצה לחכות עד 1963, כאשר המתמטיקאי Cohen (כן, כֹּהֵן!) פיתח שיטה מתמטית עמוקה (שנקראת "תורת הכפיה"), והראה בעזרתה **שלא ניתן להוכיח** את השערת הרצף. תוצאה זאת היתה ציון דרך במתמטיקה, והשיטה שכהן פיתח שימשה מאוחר יותר להוכיח שהשערות רבות במתמטיקה אינן ניתנות להוכחה ולא להפרכה. בפרט, יוצא שעוצמת הרצף יכולה להיות כמעט כל מונה אפשרי (ההגבלה היחידה היא, שצריך להתקיים $\omega<\mathrm{cof}(|\mathbb{R}|)$ – ראה הגדרה בסעיף הבא), בפרט היא יכולה להיות, למשל $\aleph_1,\aleph_2,\aleph_{17}$ ואפילו $\aleph_{\omega+1}$. כיום תורת הקבוצות מתמקדת בשאלה:

לאיזה מונה **סביר** שעוצמת הרצף תהיה שוה?

השיקולים בפתרון שאלה זאת הם עקיפים (ולכן יש מי שפוסל את השאלה מעיקרה). מספר מתמטיקאים מובהקים בתחום, החל ב Gödel עצמו והמשך ב(הרב) חיים יהודה, סוברים שהתשובה ההגיונית (למרות שלא ניתן להוכיחה) היא כנראה $2^{\aleph_0}=\aleph_2$ (בשונה מהאינטואיציה של קנטור!). בכל אופן, מהבחינה זאת השאלה עדיין פתוחה ומשמשת נושא למחקר אינטנסיבי.

ההכללה הטבעית של השערת הרצף, שנקראת **השערת הרצף המוכללת GCH** (Generalized Continuum Hypothesis), אומרת שלכל סודר α, $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$. השערה זו נוחה לשימושים שונים, כגון חישוב חזקות של מונים (התרגיל הבא ממחיש זאת. הרחבה על כך מובאות בסעיף הבא).

5.4 תרגיל. הוכח, בעזרת השערת הרצף המוכללת, את השויון $\aleph_2=2^{(2^{\aleph_0})}$.

נסיים סעיף זה בכמה תרגילים הקשורים לעובדה ש $|\mathbb{Q}|<|\mathbb{R}|$.

יהא $\mathbb{Q}[x]=\{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 : n\in\mathbb{N}, a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{Q}\}$ אוסף הפולינומים עם מקדמים רציונליים. מספר $b\in\mathbb{R}$ נקרא **אלגברי** מעל $\mathbb{Q}$ אם קיים פולינום $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$ כך ש b שורש שלו (כלומר $p(b)=0$). מספר שאינו אלגברי נקרא **טרנסצנדנטי**. מסתבר, שהדרך הקלה ביותר להראות שקיים מספר טרנסצנדנטי היא להראות שיש הרבה מאד כאלו ...

5.5 תרגיל. א. הוכח: $|\mathbb{Q}[x]|=\aleph_0$. [רמז: $\mathbb{Q}[x]\approx\mathbb{Q}^*$.]

ב. השתמש בעובדה שלכל פולינום יש רק מספר סופי של שורשים כדי להראות שאוסף המספרים הממשיים האלגבריים מעל $\mathbb{Q}$ הוא בן מניה.

ג. מהי העוצמה של קבוצת המספרים הממשיים הטרנסצנדנטיים?

5.6 תרגיל. הוכח שכל קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ הסדורה היטב על ידי הסדר הרגיל של הממשיים $(<)$ היא בת מניה.
[רמז: בין כל שני ממשיים אפשר "לדחוף" רציונלי.]

הקשור לתחום הנקרא **תורת** Ramsey. נסמן $[\mathbb{R}]^2=\{\{x,y\} : x,y\in\mathbb{R}\}$. פונקציה $f:[\mathbb{R}]^2\to\{0,1\}$ תיקרא **צביעה** של $[\mathbb{R}]^2$ (אם נזהה את 0 עם "כחול" ואת 1 עם "לבן", נקבל שלכל איבר $\{x,y\}\in[\mathbb{R}]^2$ מתאים צבע אחד – כחול או לבן).

5.7 תרגיל.* הוכח שיש צביעה של $[\mathbb{R}]^2$ בכחול ולבן (כל זוג $\{x,y\}$ מקבל צבע) כך שלכל $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $|A|=|\mathbb{R}|$, הקבוצה $[A]^2$ אינה מונוכרומטית (כלומר מכילה איברים משני הצבעים). [רמז: נסדר את $\mathbb{R}$ בסדר טוב $<_{\mathrm{Well}}$ ובסדר רגיל $<$. לכל זוג $\{x,y\}\in[\mathbb{R}]^2$, נצבע אותו בכחול אם הסדר בין x ו y זהה בשני הסדרים הנ"ל (כלומר $x<_{\mathrm{Well}}y \wedge x<y$, או $y<_{\mathrm{Well}}x \wedge y<x$), ובאחרת בלבן.]

5.8 תרגיל.* כמה צורות "8" (כולל עקומות, מכווצות, מתוחות, אבל לא קרועות) אפשר לשים במישור $\mathbb{R}^2$ לכל היותר, מבלי שיחתכו אחת את השניה? [רמז: הגדר פונקציה מאוסף השמיניות לתוך $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})^2$, על ידי בחירת נקודה אחת מכל עיגול של ה "8" הנתון.]

6 קו–סופיות של מונים, וחזקות מונים בהנחת השערת הרצף המוכללת

כדי ללמוד סעיף זה, יש ללמוד ראשית את סעיף הרשות בנושא קו–סופיות של סודרים. כיון שמונים הם מקרה פרטי של סודרים, אפשר לדבר על קו–סופיות של מונים.

6.1 תרגיל. א. יהא κ מונה רגולרי, ויהא $\lambda<\kappa$ מונה. הראה שלכל אוסף $\{X_\xi : \xi<\lambda\}$ של קבוצות שעוצמתן קטנה מ κ מתקיים $|\bigcup\{X_\xi : \xi<\lambda\}|<\kappa$.
ב. הראה שכל מונה עוקב κ הוא רגולרי. [רמז: אם $f:\alpha\to\kappa$ קו–סופית, אז $\kappa=\bigcup\{f(\xi) : \xi<\alpha\}$.]

6.2 תרגיל. הוכח שלכל מונה גבולי α, $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)=\mathrm{cf}(\alpha)$.

6.3 תרגיל. נגדיר באינדוקציה על ω: $\alpha_0=\aleph_0$, $\alpha_{n+1}=\aleph_{\alpha_n}$. יהא $\alpha=\sup\{\alpha_n ; n<\omega\}$.
א. הוכח ש α הוא הסודר הראשון המקיים $\omega_\alpha=\alpha$.
ב. הראה ש $\mathrm{cf}(\alpha)=\omega$.

6.4 תרגיל (הלמה של Zermelo–König).* יהא κ מונה אינסופי, ויהא λ מונה $\leq \mathrm{cf}(\kappa)$. הוכח: $\kappa<\kappa^{\lambda}$.
[רמז: תהא $f:\lambda\to\kappa$. אם $g:\kappa\to\kappa^{\lambda}$, אז g אינה על: נגדיר $h:\lambda\to\kappa$ כך ש $h(\alpha)$ יהיה האיבר הראשון בקבוצה $\kappa\setminus\{(g(\xi))(\alpha)\ :\ \xi<f(\alpha)\}$. אזי $h\notin\mathrm{im}(g)$.]

6.5 תרגיל. הוכח שלכל מונה אינסופי λ, $\lambda<\mathrm{cf}(2^{\lambda})$. [רמז: הלמה של König עם $\kappa=2^{\lambda}$.]

השערת הרצף המוכללת מאפשרת לחשב חזקות של מונים בצורה מפורשת.

6.6 תרגיל (חזקות של מונים בהנחת השערת הרצף). יהיו λ,κ מונים הגדולים מ 1, כך שלפחות אחד מהם אינסופי. הוכח שהשערת הרצף המוכללת גוררת את התכונות הבאות:

א. אם $\kappa\leq\lambda$, אז $\kappa^{\lambda}=\kappa^{+}$.

ב. אם $\mathrm{cf}(\kappa)\leq\lambda<\kappa$, אז $\kappa^{\lambda}=\kappa^{+}$.

ג. אם $\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)$, אז $\kappa^{\lambda}=\kappa$.

פרק ה: משפט Cantor–Bendixon

האנליזה של הישר הממשי עוסקת בקבוצות של מספרים ממשיים, בעיקר בשאלות על גדלים (עוצמות) של קבוצות מסויימות של ממשיים. שאלות אלה קשורות בצורה ישירה להשערת הרצף, האומרת שאין קבוצה של ממשיים X כך ש $\aleph_0<|X|<2^{\aleph_0}$. בין הכלים החשובים ביותר בתחום נמנים הסודרים (*בעיקר עבור אינדוקציה טרנספיניטית*) וחבריהם – המונים. בפרק זה נוכיח משפט קלאסי מאנליזה, ובכך נדגים את הישימות של מה שלמדנו. משפט זה נבע מנסיונות של קנטור להתמודד עם השערת הרצף, והעבודה עליו היתה המניע העיקרי של קנטור לפיתוח רעיון הסודרים בצורה מדוייקת.

נשתמש בצורה חופשית במינוחים, הגדרות ומשפטים מקורסים בסיסיים באנליזה, בעיקר חשבון אינפיניטסימלי.

1 קבוצות מושלמות (perfect sets)

תהא $X\subseteq\mathbb{R}$. נקודה $x\in\mathbb{R}$ נקראת **נקודת הצטברות** של X אם בכל קטע פתוח המכיל את x אפשר למצוא נקודה נוספת מ X. במלים אחרות, קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq X\setminus\{x\}$ כך ש $x_n\to x$. אם x אינה נקודת הצטברות של X, נאמר שהיא **מבודדת** ב X. הדוגמה הראשונה שלנו תהיה קבוצות שכל נקודותיהן מבודדות. קבוצה שכל נקודותיה מבודדות תיקרא **דיסקרטית**.

1.1 תרגיל. תהא $X\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה דיסקרטית. הוכח: $|X|\leq\aleph_0$. [*רמז: לכל $x\in X$, יהא (a_x,b_x) קטע המכיל את x וזר לקבוצה X. נבחר מספר רציונלי q_x בקטע זה. אזי ההעתקה $q_x\mapsto x$ היא* חח"ע.]

נבדוק מה קורה במקרה הקיצוני השני. X **אנטי–דיסקרטית** אם כל הנקודות שלה הן נקודות הצטברות (*כלומר אין בה נקודות מבודדות*). למשל, הקבוצות $\emptyset$, $\mathbb{Q}$, וכן $\mathbb{R}$ הן אנטי–דיסקרטית.

1.2 תרגיל. **תהא $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה אנטי–דיסקרטית. הוכח שלכל קטע פתוח I שאינו זר ל X, $I\cap X$ היא קבוצה אינסופית.** [*רמז: יהא $x\in X\cap I$. התבונן בסדרה $\{x_n\}\subseteq X$* כך **e** $x_n\to x$.]

בשביל התרגיל הבא, ניזכר בסימונים של סדרות. עבור קבוצה A:

- ${}^nA$ היא קבוצת כל הסדרות באורך n של איברים ב A.
- עבור $s\in{}^nA$, נכתוב לעתים s_i במקום $s(i)$, ונזהה את s עם הוקטור $\langle s_0,\dots,s_{n-1}\rangle$.
- A^* הוא אוסף כל הסדרות הסופיות (*אכל האורכים האפשריים*) של איברים ב A.
- אם $s,t\in A^*$, $s\subset t$ בדיוק כאשר: האורך n של s קטן מהאורך של t, ומתקיים $\langle s_0,\dots,s_{n-1}\rangle=s=t|_n=\langle t_0,\dots,t_{n-1}\rangle$.

- עבור סדרה סופית $s\in A^n$ ואיבר $a\in A$, נסמן ב $s^\frown a$ את הסדרה $\langle s_0,\dots,s_{n-1},a\rangle\in A^{n+1}$.

הידעתם?
two בשבט הוא ראש השנה
לעצים בינאריים (ע"פ אושקכוט)

1.3 תרגיל (**עץ בינארי של קטעים**). תהא X קבוצה אנטי-דיסקרטית. הראה שאפשר להתאים לכל סידרה סופית $s\in 2^*$ קטע $I_s\subseteq\mathbb{R}$ סגור לא טריויאלי (כך שקצוות הקטע שונים זה מזה), כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1. לכל $s\in 2^*$, $I_s\cap X\neq\emptyset$.
2. לכל $s,t\in 2^*$:

- אם $s\subset t$, אז $I_t\subset I_s$ ו $|I_t|\leq\frac{1}{2}|I_s|$, כלומר האורך של הקטעים קטן אקספוננציאלית עם הארכת הסידרה.
- אם $s\not\subseteq t$ וכן $t\not\subseteq s$, אז $I_s\cap I_t=\emptyset$, ואין לקטעים I_s,I_t קצה משותף.

[הדרכה: א. נבחר את I_0 להיות קטע סגור כלשהו שאינו זר ל X.
ב. את שאר הקטעים נגדיר באינדוקציה על האורך שלהם. בהנתן $s\in 2^n$ כך ש I_s מוגדר, נגדיר את $I_{s^\frown 0}$ ואת $I_{s^\frown 1}$ בצורה הבאה: נבחר $x_0,x_1\in X\cap I_s$ שונים (למה יש כאלו?), ונסמן $\delta=|x_1-x_0|$. ניקח $I_{s^\frown i}=[x_i-\delta/3,x_i+\delta/3]\cap I_s$, $i=0,1$.]

קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}$ נקראת **סגורה** אם כל נקודת הצטברות של X שייכת אף היא ל X. X **מושלמת** (perfect) אם היא סגורה ואנטי-דיסקרטית.

1.4 תרגיל. הוכח שהקבוצה $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ אינה סגורה. [רמז: $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, וגם $\mathbb{Q}$ צפופה ב $\mathbb{R}$.]

קבוצות מושלמות מתנהגות בהתאם להשערת הרצף.

1.5 תרגיל. תהא $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה מושלמת. הוכח שקיימת פונקציה חד-חד ערכית $f:{}^{\mathbb{N}}2\to X$, ולכן $|X|=2^{\aleph_0}$. [רמז: יהא $\{I_S : s\in 2^*\}$ עץ בינארי של קטעים על X. לכל סידרה בינארית אינסופית $\sigma\in{}^{\mathbb{N}}2$, החיתוך $\bigcap\{I_{\sigma|_n} : n<\omega\}$ הוא של קטעים סגורים שגודלם שואף לאפס, ולכן מכיל נקודה יחידה שנסמן x_σ. נגדיר $f(\sigma)=x_\sigma$. וכיח f חח"ע.]

עבור קבוצת ממשיים X, נגדיר את X' להיות קבוצת נקודות ההצטברות של X.

1.6 תרגיל. מצא קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}$ כך שב X' יש נקודות מבודדות. [רמז: סדרה מתכנסת.]

1.7 תרגיל. תהא $X\subseteq\mathbb{R}$. הוכח:

א. הקבוצה $X\setminus X'$ היא בת מניה. [ראו: היכן אבודדת.]

ב. אם X' בת מניה, אז X בת מניה. [ראו: $X\subseteq(X\setminus X')\cup X'$.]

1.8 תרגיל. תהא X קבוצה של ממשיים. הוכח:

א. הקבוצה X' היא סגורה. [ראו: נניח ש $x_n'\to x$ כאשר כל $x_n'\in X'$. לכל n, קיים $X\ni x_n$ כך ש $|x_n-x_n'|<1/n$. לכן גם $x_n\to x$ ולכן $x\in X'$.]

ב. אם X אנטי־דיסקרטית, אז $X\subseteq X'$.

ג. אם X סגורה, אז $X'\subseteq X$.

ד. X מושלמת $\Leftrightarrow$ $X'=X$.

ה. אם $\emptyset\neq X=X'$, אז $|X|=2^{\aleph_0}$. [ראו: תרגיל קודם.]

אפשר להגדיר $X^{(2)}=X''=(X')'$, $X^{(3)}=(X^{(2)})'$ וכולי. באופן כללי, נגדיר באינדוקציה טרנספיניטית על α:

1. $X^{(0)}=X$.
2. אם $\alpha=\beta+1$, $X^{(\alpha)}=(X^{(\beta)})'$.
3. אם α גבול, $X^{(\alpha)}=\bigcap\{X^{(\beta)} : 0<\beta<\alpha\}$.

1.9 תרגיל. תהא $X\subseteq\mathbb{R}$. הוכח את הטענות הבאות:

א. לכל סודר $0<\alpha$, $X^{(\alpha)}$ קבוצה סגורה.

ב. לכל זוג סודרים $0<\alpha<\beta$ מתקיים $X^{(\beta)}\subseteq X^{(\alpha)}$.

ג. לכל סודר α, אם $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$, אז לכל $\alpha\leq\beta<\gamma$ מתקיים $X^{(\beta)}=X^{(\gamma)}$. [ראו: מספיק להראות שלכל $\alpha<\beta$, $X^{(\alpha)}=X^{(\beta)}$.]

ד. אם $X^{(\alpha)}\setminus X^{(\alpha+1)}\neq\emptyset$, אז לכל $\beta<\alpha$, $X^{(\beta)}\setminus X^{(\beta+1)}\neq\emptyset$.

ה. לכל סודר α, אם $\emptyset\neq X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$, אז $|X'|=2^{\aleph_0}$.

המשפט המוכח בסידרת התרגילים הבאה היה אחד המניעים המרכזיים של קנטור לפתח את הנושא של סודרים בצורה מסודרת.

1.10 תרגיל. תהא X קבוצה של ממשיים כך ש X' בת מניה. הוכח:

א. יהא α סודר כך ש $X^{(\alpha)}\setminus X^{(\alpha+1)}\neq\emptyset$. אזי α בן מניה (כלומר $|\alpha|\leq\omega$). [ראו: לכל סודר α מתקיים $X'=(X'\setminus X'')\cup(X''\setminus X^{(3)})\cup\ldots\cup(X^{(\alpha)}\setminus X^{(\alpha+1)})\cup X^{(\alpha+1)}$. לפי תרגיל קודם, הקבוצות $X^{(\beta)}\setminus X^{(\beta+1)}$ הן זרות ולכן ריקות לכל $\alpha\leq\beta$, לכן $|\alpha|=|\{\beta<\alpha : \beta \text{ עוקב}\}|\leq|X'|$.]

ב. $X^{(\aleph_1)}\setminus X^{(\aleph_1+1)}\neq\emptyset$.

ג. קיים סודר בן מניה α כך ש $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$. [ראו: נסמן $\gamma=\sup\{\beta : X^{(\beta)}\setminus X^{(\beta+1)}\neq\emptyset\}$. $\gamma<\aleph_1$, לכן גם

$\alpha=\gamma+1<\aleph_1$ בן מניה, ומתקיים $X^{(\alpha)}\setminus X^{(\alpha+1)}=\emptyset$.]

1.11 תרגיל (משפט קנטור על נגזרות של קבוצות). תהא X קבוצה של ממשיים. הוכח:

א. אם X' בת מניה, אז קיים סודר בר מניה α כך ש $X^{(\alpha)}=\emptyset$. [ראה: תרגיל קודם.]

ב. אם קיים סודר בר מניה α כך ש $X^{(\alpha)}=\emptyset$, אז X' (ולכן גם X) בת מניה. [ראה: דומה.]

1.12 תרגיל. תהא $X\subseteq\mathbb{R}$, ויהא α סודר בן מניה. הוכח:

א. הקבוצה $X'\setminus X^{(\alpha)}$ היא בת מניה. [ראה: בדומה לרעיון בתרגיל הקודם, הראה ש $X'\setminus X^{(\alpha+1)}$ בת מניה, והשתמש בכך ש $X^{(\alpha+1)}\subseteq X^{(\alpha)}$.]

ב. הקבוצה $X\setminus X^{(\alpha)}$ היא בת מניה. [ראה: $X\setminus X'$ בת מניה.]

רעיון ההוכחה בתרגילים האחרונים מראה, באופן כללי, שלכל קבוצה X קיים סודר α שגודלו אינו עולה על הגודל של X (כלומר $\alpha\approx X$), כך ש $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$ (ייתכן שהקבוצות ריקות, אבל לא תמיד זה כך). מסתבר, שאפשר להוכיח שזה כבר קורה עבור α **בן מניה**. לשם כך דרושים מספר תרגילים מקדימים.

קבוצה $G\subseteq\mathbb{R}$ היא **פתוחה** אם קיימת קבוצה סגורה $F\subseteq\mathbb{R}$ כך ש $G=\mathbb{R}\setminus F$. מסתבר שגם קבוצות פתוחות מתנהגות בהתאם להשערת הרצף.

1.13 תרגיל. תהא G קבוצה פתוחה.

א. הוכח שלכל $x\in G$ קיים קטע $(a,b)\subseteq G$ כך ש $x\in(a,b)$. [ראה: תהא F קבוצה סגורה כך ש $G=\mathbb{R}\setminus F$. אם אין קטע כדרוש, אז x נקודת הצטברות של F.]

ב. הוכח: אם $G\neq\emptyset$, אז $|G|=2^{\aleph_0}$.

קטע $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ שקצותיו a,b רציונליים ייקרא **קטע רציונלי**.

1.14 תרגיל. תהא G קבוצה פתוחה. הוכח שלכל $x\in G$ קיים קטע רציונלי $(a,b)\subseteq G$ כך ש $x\in(a,b)$.

1.15 תרגיל. יהא $\{F_\xi : \xi<\alpha\}$ אוסף של קבוצות סגורות כך שלכל $\xi_1<\xi_2<\alpha$, $F_{\xi_1}\supset F_{\xi_2}$. הוכח ש $\alpha\approx\omega$.

[הדרכה: א. לכל $\xi<\alpha$, יהא $x\in F_\xi\setminus F_{\xi+1}$. בפרט, $x\in\mathbb{R}\setminus F_{\xi+1}$, ולכן יש קטע רציונלי (a_ξ,b_ξ) המכיל את x ומוכל ב $\mathbb{R}\setminus F_{\xi+1}$, כלומר זר ל $F_{\xi+1}$.

ב. (a_ξ,b_ξ) זר ל $F_{\xi'}$ לכל $\xi<\xi'<\alpha$.

ג. נניח בשלילה ש α אינו בן מניה. האוסף $\{(a_\xi,b_\xi) : \xi<\alpha\}$ הוא בן מניה, לכן יש $\xi_1<\xi_2$ כך ש $(a_{\xi_1},b_{\xi_1})=(a_{\xi_2},b_{\xi_2})$, ולכן $(a_{\xi_1},b_{\xi_1})\cap F_{\xi_2}\neq\emptyset$.]

1.16 תרגיל. הוכח שלכל קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}$ קיים סודר בן מניה α כך ש $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$. [רמז: תרגיל קודם.]

עכשיו אנחנו מקבלים את המשפט המיוחל.

1.17 תרגיל (משפט Cantor–Bendixon). תהא $X\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה סגורה. אזי קיימת הצגה $X=P\cup S$ כך ש P מושלמת, S בת מניה, ו $P\cap S=\emptyset$. [רמז: יהא α סודר בן מניה כך ש $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$. X סגורה, לכן $X^{(\alpha)}\subseteq X$, ולכן $X=X^{(\alpha)}\cup X\setminus X^{(\alpha)}$.]

תוצאה חשובה היא, שכל קבוצה סגורה מקיימת את השערת הרצף.

1.18 תרגיל. תהא $X\subseteq\mathbb{R}$ סגורה. הוכח: אם $\aleph_0<|X|$, אז $|X|=2^{\aleph_0}$. [רמז: משפט קנטור–בנדיקסון.]

2 הוכחה של משפט Cantor–Bendixon בכלים קלאסיים (סעיף רשות)

יש מתמטיקאים שמרגישים שלא בנוח עם אינדוקציה טרנספיניטית. הם יעדיפו כנראה את ההוכחה שמובאת בסעיף זה. באופן עקרוני, להרבה הוכחות באינדוקציה טרנספיניטית יש גם גירסאות שנמנעות מכך, אולם ההוכחות באינדוקציה טרנספיניטית הן בדרך כלל יותר "קונסטרוקטיביות", ולכן דרכן אפשר להבין טוב יותר את השאלה.

תהא $X\subseteq\mathbb{R}$. $x\in\mathbb{R}$ נקראת **נקודת עיבוי** אם לכל קטע (a,b) המכיל את x, החיתוך $(a,b)\cap X$ אינו בר מניה.

2.1 תרגיל. א. הוכח שכל נקודת עיבוי היא נקודת הצטברות.
ב. מצא דוגמא של נקודת הצטברות שאינה נקודת עיבוי.

2.2 תרגיל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:
א. x נקודת עיבוי של X.
ב. לכל קטע רציונלי (a,b) המכיל את x, החיתוך $(a,b)\cap X$ אינו בר מניה.

2.3 תרגיל. הוכח שלכל קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}$ שאינה בת מניה יש נקודת עיבוי $x\in X$. [רמז: אחרת, לכל $x\in X$ יהי קטע רציונלי $(a_x,b_x)\ni x$ כך ש $(a_x,b_x)\cap X$ בת מניה, אבל $X\subseteq\bigcup\{(a_x,b_x)\cap X : x\in X\}$ כאשר האיחוד הוא בן מניה.]

2.4 תרגיל. תהא $X\subseteq\mathbb{R}$, ותהא P קבוצת נקודות העיבוי של X.

א. הוכח שכל נקודת הצטברות של P היא נקודת עיבוי של X. [רמז: תהא x נקודת הצטברות של P. אזי לכל קטע (a,b) המכיל את x, יש $y\in(a,b)\cap P$. אבל y נקודת עיבוי של X ולכן $(a,b)\cap X$ אינה בת מניה.]

ב. תהא $S=X\backslash P$. הוכח ש S בת מניה. [רמז: אם יש נקודת עיבוי $x\in S$ של S, אזי היא נקודת עיבוי של X ולכן שייכת ל P.]

2.5 תרגיל (משפט Cantor−Bendixon). תהא $X\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה סגורה. אזי קיימת הצגה $X=P\cup S$ כך ש P מושלמת, S בת מניה, ו $P\cap S=\emptyset$.

[הדרכה: א. הגדר P,S כבתרגיל הקודם. אזי $X=P\cup S$ כאשר $P\cap S=\emptyset$, ו S בת מניה.

ב. P סגורה.

ג. P אנטי–דיסקרטית: אם $x\in P$ מבודדת, אזי יש קטע המקיים $(a,b)\cap P=\{x\}$. $((a,b)\cap X)\backslash S=(a,b)\cap P=\{x\}$. אבל S בת מניה ואילו $(a,b)\cap X$ אינה בת מניה.]

פרק ו: אקסיומת הבחירה

אקסיומת הבחירה שימשה את המתמטיקאים הקלאסיים כעקרון מובן מאליו, לעתים הם אף לא שמו לב שהם השתמשו באקסיומה זאת. בד בבד עם התפתחות תורת הקבוצות המודרנית, החלו מתמטיקאים לשים לב לאקסיומה זאת, וניסחו וריאציות רבות שלה (קיימים ספרים שלמים ועבי כרס שמוקדשים לציטוט גרסאות של האקסיומה). בפרק זה נציג חלק מהוריאציות החשובות ביותר של אקסיומת הבחירה, ונוכיח את שקילותן לאקסיומת הבחירה. נשים לב שהפיתוח של סודרים ואינדוקציה טרנספיניטית לא דרש את אקסיומת הבחירה, ולכן נוכל להשתמש בתוצאות מפרקים אלה עבור הוכחות השקילות.

1 גירסאות של אקסיומת הבחירה

לאקסיומת הבחירה מספר גירסאות ששקילותן לאקסיומה (כפי שהצגנו אותה ברשימת האקסיומות שבפרק הראשון) כמעט מידית, ובכל זאת הן חשובות משום שלעתים נוח יותר להשתמש בהן מאשר בצורה המקורית של האקסיומה. נדגים כאן מספר גירסאות.

גירסה א (אקסיומת הבחירה). לכל קבוצה F שכל אבריה הם קבוצות לא ריקות, קיימת פונקציה f עם תחום F כך שלכל $X\in F$ מתקיים $f(X)\in X$.

גירסה ב (בחירה מאוסף זר). לכל קבוצה F שכל אבריה הם קבוצות לא ריקות, קיימת קבוצה s המכילה איבר אחד בדיוק מכל קבוצה $X\in F$, ולא עוד איברים.

גירסה ג (יוניפורמיזציה של יחסים). לכל יחס R. קיימת פונקציה f עם תחום הזהה ל $\mathrm{dom}(R)$, כך שלכל $a\in \mathrm{dom}(R)$, $aRf(a)$.

בסעיף על אקסיומת הבחירה שבפרק הראשון הוכחנו שגירסה א גוררת את גירסאות ב ו–ג. למעשה, גרסאות אלה שקולות לגירסה א.

1.1 תרגיל. הוכח: גירסה ב $\Leftarrow$ גירסה א. [רמז: בהנתן אוסף F, התבונן באוסף $\{\{X\}\times X : X\in F\}$.]

1.2 תרגיל. הוכח: גירסה ג $\Leftarrow$ גירסה א. [רמז: התבונן ביחס R על $F\cup(\cup F)$, המוגדר על ידי $xRy \Leftrightarrow y\in x$.]

גירסה נוספת פגשנו בפרק על עוצמות. שם הראנו בעזרת אקסיומת הבחירה, שאם יש פונקציה $f:A\to B$

שהיא על, אז יש פונקציה חד־חד ערכית $g:B\to A$. בהוכחת הטענה הזאת, הוכחנו למעשה את הגירסה הבאה.

גירסה ד ("הפיכה" של פונקציה). לכל פונקציה $f:A\to B$ שהיא על, קיימת פונקציה חד־חד ערכית $g:B\to A$ כך שלכל $b\in B$, $f(g(b))=b$.

גם הגירסה הזאת שקולה לאקסיומת הבחירה.

1.3 תרגיל. הוכח: גירסה ד $\Leftarrow$ גירסה א. [ראה: הראה שהקבוצה $f=\{\langle x,X\rangle : x\in X\in F\}$ קיימת, ושהיא פונקציה "על".]

2 עיקרון הסדר הטוב

עיקרון הסדר הטוב. לכל קבוצה A קיים יחס R על A כך ש $\langle A,R\rangle$ סדר טוב.

בפרק השני ראינו שעיקרון הסדר הטוב גורר את אקסיומת הבחירה. לענייננו, יותר חשוב היה להוכיח את הכיוון ההפוך, דהיינו שאקסיומת הבחירה גוררת את עיקרון הסדר הטוב (כי השתמשנו בו לעתים תכופות, ואנו טוענים שאיננו משתמשים באקסיומות מעבר ל ZFC). הסיבה שחיכינו עד עכשיו היא, שכדי לקבל הוכחה פשוטה יחסית (אני אדגיש – "יחסית") לטענה זאת, אנו זקוקים לידע שצברנו בינתיים על סודרים.

2.1 תרגיל.* הוכח שעיקרון הסדר הטוב נובע מאקסיומת הבחירה.

[הדרכה: נראה שלכל קבוצה A קיים סודר α כך ש $A\approx\alpha$. נעשה זאת באינדוקציה טרנספיניטית, כאשר בשלב β נבחר את האיבר ה β של A.

א. אם A ריקה, אין מה להוכיח (כל יחס יהיה סדר טוב על A). לכן נניח ש $A\neq\emptyset$. נקבע איכשהו $b\notin A$.

ב. תהי f פונקציית בחירה על $\mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\}$. נגדיר כלל התאמה $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ לפי

$$\mathbf{F}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\} \\ b & \text{אחרת} \end{cases}.$$

ג. נגדיר, באינדוקציה טרנספיניטית על $\mathbf{ON}$, כלל התאמה $\mathbf{G}:\mathbf{ON}\to\mathbf{V}$ לפי $\mathbf{G}(\alpha)=\mathbf{F}(A\setminus\{\mathbf{G}(\beta) : \beta<\alpha\})$.

ד. לכל $\alpha\neq\beta$, אם $\mathbf{G}(\alpha),\mathbf{G}(\beta)\in A$, אזי $\mathbf{G}(\alpha)\neq\mathbf{G}(\beta)$.

ה. קיים סודר β כך ש $\mathbf{G}(\beta)\notin A$, אחרת $\mathbf{G}:\mathbf{ON}\to A$ חד־חד ערכית, בסתירה לכך ש A קבוצה.

ו. יהי α הסודר הראשון כך ש $\mathbf{G}(\alpha)\notin A$. אזי $\{\mathbf{G}(\beta) : \beta<\alpha\}=A$, לכן $A\approx\alpha$.]

3 טריכוטומיות

בסעיף הראשון בפרק על עוצמות הוכחנו, בעזרת אקסיומת הבחירה, את העיקרון הבא.

עיקרון הטריכוטומיות של $\prec$. לכל שתי קבוצות X, Y מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות: $X\approx Y$, $X\prec Y$, או $Y\prec X$.

3.1 תרגיל. הוכח שעיקרון הטריכוטומיות של $\prec$ גורר את אקסיומת הבחירה.

[הדרכה: נסתפק בכך שלכל X, Y מתקיים $Y\preceq X$ או $X\preceq Y$, ונוכיח את עקרון הסדר הטוב. תהא נתונה קבוצה A. נמצא סודר α כך ש $A\preceq\alpha$ (למה זה מספיק?).

א. נגדיר $\Gamma(A)=\{\alpha : \alpha\preceq A\}$. (הראה ש $\Gamma(A)$ קבוצה.)

ב. $\Gamma(A)$ $\in$-טרנזיטיבית, ולכן סודר.

ג. מהטריכוטומיות, מתקיים $A\preceq\Gamma(A)$, או $\Gamma(A)\preceq A$.

ד. אם $\Gamma(A)\preceq A$, אז $\Gamma(A)\in\Gamma(A)$, בסתירה לתכונות סודרים. לכן $A\preceq\Gamma(A)$.]

4 הַלֶּמָּה של Zorn

הלמה של Zorn היא אחת הוריאציות החשובות ביותר של אקסיומת הבחירה (הלמה נקראת על שם המתמטיקאי Zorn, שהיה בין הראשונים שהוכיחו את שקילות הלמה לאקסיומת הבחירה. למען הדיוק, המתמטיקאי Hausdorff קדם לו בהוכחת הלמה מתוך אקסיומת הבחירה). שימוש בלמה אינו דורש ידע בסודרים, ובמקרים רבים היא יכולה לשמש תחליף לאינדוקציה טרנספיניטית (לכן היא פופולארית מאוד באלגברה, למשל). חסרונה הוא, שהיא אינה "קונסטרוקטיבית": היא מבטיחה קיום של קבוצה מסויימת, מבלי לתת לנו מושג איך התקבלה הקבוצה.

ללמה זאת מספר גירסאות. נציג אחת מהן. יהא R סדר חלקי על A, ויהא $a\in A$. a **מקסימלי** ב A (ביחס ל R) אם אין $x\in A$ המקיים $a <_R x$.

הלמה של Zorn. יהא R סדר חלקי על קבוצה לא ריקה A, כך שלכל $B\subseteq A$ הסדורה קוית על ידי R יש חסם מלעיל ב A (איבר $a\in A$ כך שלכל $b\in B$, $b\leq_R a$). אזי יש ב A איבר מקסימלי (ביחס ל R).

עלינו להראות שהלמה הזאת נובעת מאקסיומת הבחירה. כיון שהראנו שאקסיומת הבחירה גוררת את עקרון הסדר הטוב, נוכל להשתמש בעקרון זה בהוכחתנו.

4.1 תרגיל.* הוכח, בעזרת אקסיומת הבחירה, את הלמה של Zorn.

[הדרכה: נניח בשלילה, שאין ב A איבר מקסימלי. ניעזר בסדר טוב S על A.

א. יהא $\kappa=|A|$. נגדיר באינדוקציה טרנספיניטית פונקציה $g:\kappa^+\to A$, בצורה הבאה:

1. $g(0)$ הוא האיבר הראשון ב A (ביחס ל S).
2. עבור $\alpha=\beta+1<\kappa^+$, $g(\alpha)$ הוא האיבר הראשון (ביחס ל S) $a\in A$ כך ש $g(\beta)<_R a$.
3. עבור $\alpha<\kappa^+$ גבול, הקבוצה $\{g(\beta):\beta<\alpha\}$ סדורה קווית על ידי R, לכן יש לה חסם מלעיל. מבין כל החסמים מלעיל שיש, נקח את הראשון להיות $g(\alpha)$.

ב. g חד-חד ערכית, סתירה.]

מסתבר שקל מאד להוכיח את אקסיומת הבחירה בעזרת הלמה של צורן, ולכן למה זאת שקולה לאקסיומת הבחירה.

תהא F קבוצה של קבוצות. $C\subseteq F$ היא **שרשרת ב** F אם לכל $A,B\in C$ מתקיים $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$. את התוצאה הבאה תפגשו, קרוב לודאי, בכל פעם שתרצו להוכיח קיום של מבנה מקסימלי (אידיאל מקסימלי, תת-שדה מקסימלי, מסנן מקסימלי, ועוד).

4.2 תרגיל. א. תהא $\mathcal{F}$ קבוצה של קבוצות כך שלכל שרשרת C של קבוצות ב $\mathcal{F}$, $\cup C\in\mathcal{F}$. הוכח, בעזרת הלמה של צורן, שיש $A\in\mathcal{F}$ שהיא מקסימלית ביחס להכלה (כלומר כך שאין $B\in\mathcal{F}$ כך ש $A\subset B$). [רמז: $\langle\mathcal{F},\subset\rangle$ סדר חלקי.]

ב. הוכח, בעזרת הלמה של Zorn, את אקסיומת הבחירה. [רמז: תהא F קבוצה של קבוצות לא ריקות. אזי הקבוצה $\mathcal{F}=\{f:$ f פונקצית בחירה על תת-קבוצה של $F\}$ מקיימת את התנאי שבסעיף (א). הראה שאיבר מקסימלי ב f הוא בהכרח פונקצית בחירה על $\mathcal{F}$.]

4.3 תרגיל. הוכח, בעזרת הלמה של צורן, את הטענה הבאה: לכל קבוצה F קיימת שרשרת $C\subseteq F$ שהיא מקסימלית ביחס להכלה (כלומר אין שרשרת $B\subseteq F$ כך ש $C\subset B$). [רמז: התבונן בקבוצה $\mathcal{C}=\{C\subseteq F:$ C שרשרת$\}$.]

עכשיו נראה דוגמא לשימוש "אמיתי" של הלמה של צורן. אתם זוכרים (?) מאלגברה לינארית את המושג **בסיס של מרחב וקטורי**. לצורכנו, נגדיר בסיס כקבוצה בלתי תלויה לינארית שהיא מקסימלית ביחס להכלה (כלומר אין קבוצה בלתי תלויה לינארית המכילה אותה ממש).

4.4 תרגיל. א. הוכח שלכל מרחב וקטורי יש בסיס. [רמז: אחד התרגילים דלעיל.]

ב. נתבונן ב $\mathbb{R}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$. יהא B בסיס עבור מרחב זה. הוכח: $|B|=2^{\aleph_0}$.

נסיים בדוגמא חשובה מתורת הקבוצות. נקבע קבוצהלא ריקה X. אוסף $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ נקרא **אידיאל** (ב $\mathcal{P}(X)$) אם:

0. $\emptyset\in\mathcal{I}, X\notin\mathcal{I}$.
1. אם $A\subseteq B\in\mathcal{I}$, אז גם $A\in\mathcal{I}$.
2. אם $A,B\in\mathcal{I}$, אז גם $A\cup B\in\mathcal{I}$.

אינטואיטיבית, אידיאל הוא אוסף של קבוצות "קטנות". למי שיודע קצת אלגברה: לא במקרה משתמשים במלה "אידיאל" השייכת לאלגברה, כמו שניתן לראות בתרגיל הבא.

4.5 תרגיל.* א. הוכח שלכל X, הקבוצה $R=\mathcal{P}(X)$ עם $+_R=\Delta$ (הפרש סימטרי) ו $\cdot_R=\cap$ (חיתוך) היא חוג (קומוטטיבי) עם $1_R=X, 0_R=\emptyset$.

ב. הוכח שאם $\mathcal{I}$ אידיאל ב $\mathcal{P}(X)$ במובן שהגדרנו, אז $\mathcal{I}$ אידיאל של ממש בחוג R במובן האלגברי.
[ראו: $A\cup B=A\Delta B\Delta(A\cap B)$.]

$\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ הוא **אידיאל מקסימלי** אם אין אידיאל $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{P}(X)$ כך ש $\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$. הלמה של צורן מאפשרת להוכיח קיום של אידיאל מקסימלי בכל אוסף $\mathcal{P}(X)$.

4.6 תרגיל. תהא $X\neq\emptyset$. הוכח שקיים אידיאל מקסימלי ב $\mathcal{P}(X)$.

5 קוריוזים (סעיף רשות)

כשלמדתי לראשונה את הנושא של אקסיומת הבחירה, מצאתי מספר גרסאות שקולות משעשעות (אך חסרות שימוש מעשי) שלה. נראה כאן שתיים מהן.

עיקרון סידור החבורות. לכל חבורה G קיים סדר טוב R על G.

עיקרון סידור החוגים. לכל חוג $\mathcal{R}$ קיים סדר טוב R על $\mathcal{R}$.

עיקרון סידור השדות. לכל שדה $\mathbb{F}$ קיים סדר טוב R על F.

5.1 תרגיל. א. הוכח שאקסיומת הבחירה שקולה לעיקרון סידור החבורות. [ראו: לכל קבוצה A, A מוכלת בחבורה החופשית F_A הנוצרת על ידי A, ולכן סידור טוב של F_A נותן סידור טוב של A.]

ב. הוכח שאקסיומת הבחירה שקולה לעיקרון סידור החוגים. [ראו: בהינתן קבוצה A, התבונן בחוג הפולינומים $F[\{x_a : a\in A\}]$, עם השיכון $a\mapsto x_a$.]

ג. כנ"ל עבור שדות. [רמז: תהיו נתונה קבוצה A. חוג האנות $\{F[\{x_a : a \in A\}]\}$ הוכו $\mathbb{F} = \{\frac{f}{g} : f, g \in F[\{x_a : a \in A\}]\}$ שדה.]

נספח א: מערכות של מספרים

בפרק זה נראה כיצד אפשר להגדיר, בעזרת הכלים שיש לנו, את המערכות המוכרות של מספרים: הטבעיים $\mathbb{N}$, השלמים $\mathbb{Z}$, הרציונליים $\mathbb{Q}$, הממשיים $\mathbb{R}$, והמרוכבים $\mathbb{C}$. למען השלמות, חלק מהתרגילים המופיעים כאן חוזרים על תרגילים המופיעים בגוף החוברת.

1 יחסי שקילות, מחלקות שקילות והמספרים השלמים

קבוצת **המספרים הטבעיים** $\mathbb{N}$ היא פשוט הקבוצה ω (בפיתוח שנציג כאן, $0\in\mathbb{N}$), עם היחס "$<$", וכן החיבור והכפל של סודרים (או מונים, במקרה של איברי ω זה לא משנה). כמובן, תכונות Peano של ω חלות על $\mathbb{N}$ (זו אותה קבוצה!), ובפרט עקרון האינדוקציה המוכר.

לשם הגדרת הקבוצות היותר מורכבות, אנו זקוקים למושג של יחס שקילות. יהא R יחס על A. R הוא **יחס שקילות** על A אם הוא סימטרי, רפלקסיבי וטרנזיטיבי (ראה הגדרות בפרק על סדרים). מקובל לסמן יחס שקילות בסימן $\sim$ (לכן, במקום לכתוב aRb כותבים $a\sim b$).
אם $\sim$ יחס שקילות על A ו $a\in A$, **מחלקת השקילות של** a היא $[a]=\{x\in A : x\sim a\}$.

1.1 תרגיל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות זו לזו:
א. $[a]=[b]$.
ב. $a\in[b]$.
ג. $b\in[a]$.
ד. $a\sim b$.

האוסף $\{[a] : a\in A\}$ של כל מחלקות השקילות ב A מסומן $A/\sim$.
אוסף $\mathcal{F}$ של תת–קבוצות של A ייקרא **חלוקה** של A אם:
1. $\bigcup\mathcal{F}=A$.
2. כל $X,Y\in\mathcal{F}$ שונים הם זרים: $X\cap Y=\emptyset$.

1.2 תרגיל. א. יהא $\sim$ יחס שקילות על A. הוכח שאוסף מחלקות השקילות $A/\sim$ הוא חלוקה של A.
ב. תהא $\mathcal{F}$ חלוקה של A. נגדיר יחס $\sim_{\mathcal{F}}$ על A לפי: $a\sim_{\mathcal{F}}b \iff$ קיים $X\in\mathcal{F}$ כך ש $a,b\in X$. הוכח ש $\sim_{\mathcal{F}}$ הוא יחס שקילות.

יהא $\sim$ יחס שקילות על A. יחס R על A נקרא **שומר שקילות** אם $aRb \to cRd$ לכל $a,b,c,d \in A$ כך ש $a \sim c$ ו $b \sim d$. נזכור שכל פונקציה $f{:}A \to A$ היא בפרט יחס על A, ולכן נאמר שהפונקציה f שומרת שקילות אם הקבוצה f היא יחס שומר שקילות.

1.3 תרגיל. יהא $\sim$ יחס שקילות על A, ותהא $f{:}A \to A$ פונקציה. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. f פונקציה שומרת שקילות.

ב. לכל $a,b \in A$ כך ש $a \sim b$ מתקיים $f(a) \sim f(b)$.

יהא $\sim$ יחס שקילות על קבוצה A, ותהי f פונקציה על A. היינו רוצים להגדיר פונקציה $\bar{f}$ על $A/\sim$ בצורה הבאה: $\bar{f}([a])=[f(a)]$, כלומר: לכל מחלקת שקילות $C \in A/\sim$, בוחרים נציג $a \in C$, מחשבים את $f(a)$, ולוקחים את מחלקת השקילות של מה שיצא. הבעיה היא, שהגדרה זאת לא בהכרח חד-ערכית: אם ניקח נציג אחר מהמחלקה $b \in C$, אותו חשבון ייתן לנו את $[f(b)]$, ולא בהכרח $[f(a)]=[f(b)]$. יוצא, שההגדרה היא טובה רק כאשר הפונקציה f היא שומרת שקילות. על כך בתרגיל הבא.

יהא R יחס על A (R יכול להיות גם פונקציה מ A ל A). **היחס המושרה** על $A/\sim$ הוא $\bar{R}=\{\langle [a],[b] \rangle : a,b \in A,\ aRb\}$. התרגיל הבא דן בקשר בין היחס ליחס המושרה.

1.4 תרגיל. יהא $\sim$ יחס שקילות על A.

א. יהא R יחס שומר שקילות על A. הוכח: $[a]\bar{R}[b] \Leftrightarrow aRb$.

ב. תהא $f{:}A \to A$ פונקציה שומרת שקילות. הוכח ש $\bar{f}{:}A/\sim \to A/\sim$ פונקציה, והראה שמתקיים $\bar{f}([a])=[f(a)]$ לכל $a \in A$. [רמז: יש להראות שאם $[a]=[b]$ אז $\bar{f}([a])=\bar{f}([b])$ (תנאי החד-ערכיות של הפונקציה $\bar{f}$).]

באופן כללי, עבור n טבעי, $f{:}A^n \to A$ תיקרא שומרת שקילות אם התנאי $a_0 \sim b_0, \dots ,a_{n-1} \sim b_{n-1}$ גורר ש $f(a_0, \dots ,a_{n-1})=f(b_0, \dots ,b_{n-1})$.

1.5 תרגיל. יהא $\sim$ יחס שקילות על A. נסח והוכח טענה דומה לזו שבתרגיל הקודם, עבור פונקציה שומרת שקילות $f{:}A^n \to A$ כאשר n מספר טבעי כלשהו.

בספרות המקצועית, פונקציות המוגדרות בעזרת פונקציות שומרות שקילות (כמו בתרגיל האחרון) נקראות **פונקציות מוגדרות היטב**.

עכשיו, סוף סוף, אפשר לעבור להגדרה של המספרים השלמים. הרעיון בהגדרת המספרים השלמים הוא כזה: התכונה המבדילה בין השלמים לטבעיים היא היכולת לבצע חיסורים גם כאשר התוצאה אינה מספר

חיובי, כמו למשל במקרה 5−2. פתרון פורמאלי קל לבעיה הוא לזהות את ההפרש $a-b$ עם הזוג הסדור $\langle a,b\rangle$. במקרה זה, המספרים הטבעיים n יזוהו עם הזוגות הסדורים $\langle n,0\rangle$, והמספרים $\langle 0,n\rangle$ יתאימו למספרים "$-n$". הבעיה עם הפתרון הזה היא, שאפשר לקבל את אותו הפרש במספר דרכים, למשל $5-2=6-3$, ואילו הזוגות הסדורים המתאימים $\langle 6,3\rangle,\langle 5,2\rangle$ **אינם** שוים. הפתרון יהיה לזהות זוגות כאלו על ידי יחס שקילות. אנו מעוניינים ביחס $\sim$ כך ש $\langle a,b\rangle\sim\langle c,d\rangle$ בדיוק כאשר $a-b=c-d$, אבל ההפרשים $a-b,c-d$ עדיין אינם מוגדרים (לא בדיוק הבעיה שאנו מנסים לפתור). הפתרון הוא לשים לב, שהתנאי האינטואיטיבי $a-b=c-d$ שקול לתנאי המוגדר היטב $a+d=c+b$.

קבוצת **המספרים השלמים** $\mathbb{Z}$ מוגדרת בצורה הבאה: נגדיר יחס שקילות $\sim_{\mathbb{Z}}$ על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ בצורה הבאה:

$$\langle a,b\rangle\sim_{\mathbb{Z}}\langle c,d\rangle \iff a+d=c+b.$$

1.6 תרגיל. הוכח שהיחס $\sim_{\mathbb{Z}}$ **הוא יחס שקילות על** $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

נגדיר $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim_{\mathbb{Z}}$. אנו רוצים להשתמש בהגדרה של סדר, חיבור וכפל על $\mathbb{N}$ כדי להגדיר את הפעולות המתאימות על $\mathbb{Z}$. לשם כך, נוודא קודם שפונקציות אלה שומרות שקילות.

1.7 תרגיל. הוכח את הטענות הבאות לגבי יחס השקילות $\sim_{\mathbb{Z}}$:

א. היחס $<$ על $\mathbb{N}$ שומר שקילות.

ב. הפונקציה $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שומרת שקילות.

ג. הפונקציה $\cdot:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שומרת שקילות.

לאור התרגיל האחרון, אפשר להגדיר על $\mathbb{Z}$ את היחס והפעולות הבאות:

- **סדר**: $[\langle a,b\rangle]<[\langle c,d\rangle] \iff a+d<c+b$.
- **חיבור**: $[\langle a,b\rangle]+[\langle c,d\rangle]=[\langle a+c,b+d\rangle]$.
- **כפל**: $[\langle a,b\rangle]\cdot[\langle c,d\rangle]=[\langle ac+bd,ad+bc\rangle]$.

וכן את הפונקציה שלא קיימת במספרים הטבעיים:

- **חיסור**: $[\langle a,b\rangle]-[\langle c,d\rangle]=[\langle a+d,b+c\rangle]$.

אפשר להראות שלפונקציות אלה יש את כל התכונות המוכרות לנו ביחס למספרים השלמים. למשל:

1.8 תרגיל. הוכח, בעזרת התכונות של מספרים טבעיים:

א. **חוק הצימצום**: לכל $a,b,c\in\mathbb{Z}$, אם $a+c=b+c$, אז $a=b$.

ב.* לכל $a,b\in\mathbb{Z}$, אם $a\cdot b=0$, אז $a=0$ או $b=0$. [רמז: חלק למקרים $a,b\geq 0$, $a,b\leq 0$, $0\leq a\wedge b\leq 0$. היעזר בעובדה שאם $n,m\in\omega$ מקיימים $n\cdot m=0$, אז $n=0$ או $m=0$.]

קצרנות. כאשר אנו מדברים על מספר **שלם** n, הכוונה לאיבר המתאים $[\langle a,b\rangle]\in\mathbb{Z}$ כאשר $a=b+n$ ($a-b=n$). כאשר אנו מבצעים השוואה, חיבור, חיסור או כפל של מספרים שלמים m,n, הכוונה להשוואה, חיבור, חיסור או כפל של האיברים המתאימים לפי ההגדרות הנ"ל.

דני שם לב, שלפי ההגדרה שלנו לא מתקיימת ההכלה המוכרת $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$. בעיה זאת עוקפים על ידי **שיכון** של הקבוצה $\mathbb{N}$ בתוך הקבוצה $\mathbb{Z}$ בעזרת פונקציה $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חד-חד ערכית ושומרת על כל התכונות של $\mathbb{N}$.

1.9 תרגיל. נגדיר $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ על ידי $f(n)=[\langle n,0\rangle]$. הוכח את התכונות הבאות:

א. $n<m\Leftrightarrow f(n)<f(m)$.

ב. $m+n=k\Leftrightarrow f(m)+f(n)=f(k)$.

ג. $m\cdot n=k\Leftrightarrow f(m)\cdot f(n)=f(k)$.

מסמנים את העובדה ש $\mathbb{N}$ משוכנת ב $\mathbb{Z}$ כך: $\mathbb{N}\hookrightarrow\mathbb{Z}$. כאשר אנו אומרים ש $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$, הכוונה ל"עותק" של $\mathbb{N}$, $f[\mathbb{N}]$ המוכל ב $\mathbb{Z}$. רעיון זה ימשיך לאורך כל הדרך בהגדרה של הרציונלים, הממשיים והמרוכבים.

נסיים סעיף זה בתרגיל על עוצמות.

1.10 תרגיל. הוכח: $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$.

2 המספרים הרציונלים

אחרי שעברנו את המשוכה הקשה של בניית המספרים השלמים, ייקל עלינו לבנות את המספרים הרציונלים. לא משום שזה יותר קל, אלא משום שנשתמש בדיוק באותה טכניקה של מחלקות שקילות.

הרעיון בבניית המספרים הרציונליים הוא זיהוי המנה $\frac{m}{n}$ (כאשר $n\neq 0$) עם הזוג הסדור $\langle m,n\rangle$ של מספרים שלמים. נגדיר יחס שקילות $\sim_{\mathbb{Q}}$ על $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ לפי:

$$\langle a,b\rangle\sim_{\mathbb{Q}}\langle c,d\rangle \;\Leftrightarrow\; a\cdot d = b\cdot c.$$

(שים לב שהכפל כאן הוא של מספרים שלמים.)

2.1 תרגיל. הוכח ש $\sim_{\mathbb{Q}}$ הוא יחס שקילות על $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$.

לשם נוחיות, נסמן את מחלקת השקילות של זוג סדור של שלמים $\langle m,n\rangle$ כך: $\frac{m}{n}$ (דהיינו $\frac{m}{n}=[\langle m,n\rangle]$).

נשים לב ש $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ במובן שאנו רגילים אליו בדיוק כאשר $\langle a,b\rangle\sim_{\mathbb{Q}}\langle c,d\rangle$.

2.2 תרגיל. הוכח את הטענות הבאות לגבי יחס השקילות $\sim_{\mathbb{Q}}$:

א. היחס $<$ על $\mathbb{Z}$ שומר שקילות.

ב. הפונקצות $+,\cdot,-:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ שומרות שקילות.

לכן אפשר להגדיר את קבוצת **המספרים הרציונלים** $\mathbb{Q}$ להיות הקבוצה $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})/\sim_{\mathbb{Q}}$, עם היחס והפעולות הבאות (ההגדרות לא צריכות להפתיע אתכם):

- **סדר**: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \iff ad<bc$ וגם $0<bd$, **או** $bc<ad$ וגם $bd<0$.
- **חיבור**: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.
- **חיסור**: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.
- **כפל**: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

וכן את הפונקציה הנוספת:

- **חילוק**: אם $c\neq 0$, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

התרגיל הבא מראה שיכון של $\mathbb{Z}$ ב $\mathbb{Q}$.

2.3 תרגיל. נגדיר $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ **על ידי** $f(n)=\frac{n}{1}$. הוכח:

א. $n<m\iff f(n)<f(m)$.

ב. $m+n=k\iff f(m)+f(n)=f(k)$.

ג. $m-n=k \iff f(m)-f(n)=f(k)$.

ד. $m\cdot n=k\iff f(m)\cdot f(n)=f(k)$.

לכן $\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}$, ובצורה בלתי פורמאלית נכתוב ש $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$.

אחרי שלמדנו על תכונות של מונים, התרגיל הבא לא צריך להפתיע אותנו.

2.4 תרגיל. הוכח ש $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$.

אפשר להוכיח שהמבנה של $\mathbb{Q}$ עם החיבור והכפל שהגדרנו מהווה מה שנקרא באלגברה **שדה**, כלומר החיבור והכפל שהגדרנו על $\mathbb{Q}$ מקיימים את התכונות הבאות:

- $\forall x,y,z\in\mathbb{Q}\ x+(y+z)=(x+y)+z \wedge x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
- $\forall x,y\in\mathbb{Q}\ x+y=y+x \wedge x\cdot y=y\cdot x$
- $\forall x\in\mathbb{Q}\ x+0=x \wedge x\cdot 1=x$ (לאור השיכון $\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}$, כתבנו כאן 0 באקום $\frac{0}{1}$ ו 1 באקום $\frac{1}{1}$)

- $\forall x\in\mathbb{Q}\exists y\in\mathbb{Q}\ x+y=0$
- $\forall 0\neq x\in\mathbb{Q}\exists y\in\mathbb{Q}\ x\cdot y=1$
- $\forall x,y,z\in\mathbb{Q}\ x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

מי שלא מאמין מוזמן לפתור את התרגיל הבא.

2.5 תרגיל. הוכח ש $\mathbb{Q}$ שדה.

2.6 תרגיל (צפיפות הרציונליים). הוכח שלכל $a,b\in\mathbb{Q}$ כך ש $a<b$, קיים $c\in\mathbb{Q}$ כך ש $a<c<b$. [רמז: הראה שהממוצע האלגברי של רציונליים הוא רציונלי.]

3 המספרים הממשיים

נראה שלא נגזים אם נאמר שקבוצת המספרים הממשיים היא הקבוצה החשובה ביותר במתמטיקה. למעשה, יש תחומים שלמים במתמטיקה (תורת הקבוצות, אנליזה, ועוד) שעיקר העיסוק שלהם הוא בעניינים הקשורים לקבוצה זאת, או בהפשטות של תכונות מסויימות המאפיינות אותה.

ההגדרה הפורמאלית שנציג כאן היא לפי Dedekind, בן זמנו של קנטור. כהרגלנו, נסמן עבור $q\in\mathbb{Q}$: $\overset{q}{\mathbb{Q}}=\{a\in\mathbb{Q} : a<q\}$. קבוצה $\emptyset\neq C\subset\mathbb{Q}$ נקראת **חתך** (שמאלי) אם לכל $q\in C$ מתקיים $\overset{q}{\mathbb{Q}}\subseteq C$, ואין איבר גדול ביותר ב C.

3.1 תרגיל. הוכח שהקבוצות הבאות הן חתכים:

א. $\{q\in\mathbb{Q} : q<1\}$.

ב. $\{q\in\mathbb{Q} : q<0 \vee q^2<2\}$. [רמז: עבור החלק הקשה של ההוכחה, בהנתן $q^2<2$ מצא $\epsilon\in\mathbb{Q}$ כך ש $(q+\epsilon)^2<2$.]

ג. $\overset{q}{\mathbb{Q}}$, כאשר $q\in\mathbb{Q}$ כלשהו.

חתך מהצורה $\overset{q}{\mathbb{Q}}$ ייקרא **חתך רציונלי**. חתך שאינו רציונלי ייקרא **חתך אירציונלי**.

3.2 תרגיל. יהא $C\subseteq\mathbb{Q}$ חתך. הוכח: C רציונלי $\Leftrightarrow$ קיים ב $\mathbb{Q}\setminus C$ איבר ראשון (ביחס לסדר $<$).

3.3 תרגיל. **א.** יהיו $a,b\in\mathbb{Q}$. הוכח: $\overset{a}{\mathbb{Q}}\subset\overset{b}{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow a<b$.

נסמן את אוסף החתכים ב $\mathbb{R}$.

3.4 תרגיל. הוכח: $|\mathbb{R}| \le 2^{\aleph_0}$ (בהמשך נראה שמתקיים שויון).

נגדיר **סדר** $<_{\mathbb{R}}$ על $\mathbb{R}$ כך: $C_1 <_{\mathbb{R}} C_2 \iff C_1 \subset C_2$.

3.5 תרגיל. הוכח את התכונות הבאות של היחס $<_{\mathbb{R}}$:

א. $A \le_{\mathbb{R}} B \le_{\mathbb{R}} C \rightarrow A \le_{\mathbb{R}} C$.

ב. אם $A \le_{\mathbb{R}} B <_{\mathbb{R}} C$ או $A <_{\mathbb{R}} B \le_{\mathbb{R}} C$, אז $A <_{\mathbb{R}} C$.

3.6 תרגיל. הוכח שהסדר $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$ שלם.

החתכים הרציונליים צפופים ב $\mathbb{R}$.

3.7 תרגיל. יהיו $A, B \in \mathbb{R}$ חתכים. הוכח:

א. $A <_{\mathbb{R}} B \iff$ קיים $q \in B \setminus A$.

ב. אם $A <_{\mathbb{R}} B$, אז קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש $A <_{\mathbb{R}} \overset{q}{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{R}} B$. [רמז: קח $q \in B \setminus A$.]

לחתכים אנחנו קוראים **מספרים ממשיים**. לחתכים אירציונליים נקרא **מספרים אירציונליים**. נמשיך להשתמש באותיות גדולות $A, B, \ldots$ לציין מספרים ממשיים כאשר אנו מעוניינים להתבונן בהם כחתכים.

על מספרים ממשיים A, B מגדירים **חיבור** בצורה הבאה:

$$A+B = \{a+b : a \in A,\ b \in B\}.$$

3.8 תרגיל. הוכח שלכל זוג מספרים ממשיים A, B, סכומם $A+B$ הוא חתך.

3.9 תרגיל. הוכח שההעתקה $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(q) = \overset{q}{\mathbb{Q}}$ היא שיכון (חח"ע, שומרת סדר ופעולות). היעזר בתכונות של מספרים רציונליים, הידועות לך (לכן בהכרח מוכרות לו).

לאור התרגיל האחרון, נזהה מספרים רציונליים q עם החתכים הרציונליים $\overset{q}{\mathbb{Q}}$. למשל, כשאנו כותבים $q < A$ עבור חתך מסויים A, הכוונה היא $\overset{q}{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{R}} A$. (לשם נוחיות, גם השמטנו את האינדקס $\mathbb{R}$ בסימן $<$.) כאשר אנו כותבים $A+q$, הכוונה לסכום $A+\overset{q}{\mathbb{Q}}$, וכו'. הרעיון דומה למה שקורה בשפות תכנות מסויימות (למשל, בשפות $C/C{+}{+}$) כאשר מחברים או משווים משתנים מטיפוסים שונים (כמו מחברים int עם float, המחשב מתרגם את המשתנה מטיפוס int למשתנה מטיפוס float, וכך מבצע חיבור של משתנים מטיפוס float).

3.10 תרגיל. יהא A חתך, ויהא q מספר רציונלי. הוכח: $q \in A \leftrightarrow q < A$ (במילים אחרות, לכל חתך A מתקיים

.($A=\{q\in\mathbb{Q} : q<A\}$

3.11 תרגיל (נייטרליות 0 בממשיים). הוכח שלכל חתך A מתקיים $A+0=A$ (שים לב: הכוונה לשוויון $A+\overset{0}{\mathbb{Q}}=A$).

3.12 תרגיל (תכונת ארכימדס). הוכח: לכל חתך A קיים מספר טבעי n כך ש $A<n$ (כלומר $A<_{\mathbb{R}}\overset{n}{\mathbb{Q}}$).
[רמז: הראה שלכל מספר רציונלי q קיים מספר טבעי n כך ש $q<n$. יהא $q\in\mathbb{Q}\setminus A$. אזי $A<\overset{q}{\mathbb{Q}}<\overset{n}{\mathbb{Q}}$.]

אפשר להוכיח שהחיבור מקיים את כל התכונות המוכרות לנו (לא נתעכב על כך). בפרט, לכל מספר ממשי A קיים **נגדי** $-A=\{-q\in\mathbb{Q} : A<q\}$, ולכן אפשר להגדיר את **הערך המוחלט** של A:

$$|A|=\begin{cases}A & 0<A\\ -A & A<0\end{cases}$$ (למרות שהסימון זהה, כאן אין הכוונה לעוצמה!),

וכן את פעולת ה**חיסור של ממשיים**: $A-B=A+(-B)$.

3.13 תרגיל. יהא A מספר ממשי. הוכח: $|A|=A\cup(-A)$.

3.14 תרגיל. א. יהיו A,B מספרים ממשיים. הוכח: $A<B\leftrightarrow -B<-A$. [רמז: אם q רציונלי כך ש $A<q<B$, אז $-B\leq -q<-A$. בכיוון ההפוך, אם $-B<p=-q<-A$, אז $A<q\leq B$.]
ב. יהא A חתך ויהא $q\in\mathbb{Q}$. הוכח: $-q<x \leftrightarrow -x<q$. [רמז: עבור q רציונלי מתקיים $-(-q)=q$.]
ג. יהא A חתך. הוכח: $-(-A)=A$.

3.15 תרגיל. יהא A מספר ממשי. הוכח:
א. $A+(-A)=0$.
ב. $A\leq|A|$.
ג. $\overset{0}{\mathbb{Q}}\leq|A|$.

כעת אנו מוכנים להגדרת ה**כפל** של ממשיים. עבור ממשיים $0\leq A,B$ נגדיר:

$$A\cdot B=\{ab : 0\leq a\in A,\ 0\leq b\in B\}\cup\overset{0}{\mathbb{Q}}.$$

אם $A,B\leq 0$ (ואחד מהם קטן ממש מאפס), נגדיר $A\cdot B=|A|\cdot|B|\,(=(-A)\cdot(-B))$. במקרים הנותרים (אחד מהם בלבד שלילי), נגדיר $A\cdot B=-(|A|\cdot|B|)$.

אפשר להוכיח ש $\mathbb{R}$, עם הפעולות שהגדרנו, הוא שדה. (לא נעשה זאת.)

3.16 תרגיל. הוכח שקיים מספר ממשי A כך ש $A^2=2$.

יהא $\langle A,R\rangle$ סדר חלקי, ותהא $B\subseteq A$. איבר $a\in A$ נקרא **חסם מלעיל** של B אם לכל $b\in B$ מתקיים $b\leq_R a$. קבוצה שיש לה חסם מלעיל נקראת **חסומה מלעיל**. אם $B\subseteq A$ חסומה מלעיל, אפשר להתבונן בקבוצה $\{a\in A : B \text{ חסם מלעיל של } a\}$, ולשאול האם יש בה איבר ראשון. אם יש איבר ראשון כזה, הוא ייקרא **חסם עליון** של B, ויסומן $\sup(B)$. נאמר ש $\langle A,R\rangle$ מקיימת את **עקרון החסם העליון** אם לכל $\emptyset\neq B\subseteq A$ יש חסם עליון.

3.17 תרגיל. א. הוכח שכל סודר מקיים את עקרון החסם העליון. מהו החסם העליון המתאים?

ב. הוכח שהקבוצות $\mathbb{Z}$ ו $\mathbb{N}$ מקיימות את עקרון החסם העליון.

ג. הראה שהקבוצה $\mathbb{Q}$ אינה מקיימת את עקרון החסם העליון.

אם כן, כשעברנו מ $\mathbb{Z}$ ל $\mathbb{Q}$ איבדנו את קיום עקרון החסם העליון. מתברר, שכשעברנו ל $\mathbb{R}$ החזרנו עטרה ליושנה.

3.18 תרגיל (עקרון החסם העליון). א. תהא F קבוצה לא ריקה של חתכים, כך ש $\cup F\neq\mathbb{Q}$. הוכח ש $\cup F$ חתך.

ב. הוכח שקבוצה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מקיימת את עקרון החסם העליון. [רמז: אם $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$ וחסומה מלעיל, אזי $\cup X$ חתך, כלומר מספר ממשי, והוא החסם העליון של X.]

עבור מספר ממשי A, נגדיר את $\lceil A\rceil$ להיות המספר הטבעי הראשון n כך ש $A<n$.

3.19 תרגיל. הסבר מדוע לכל מספר ממשי A הפונקציה $\lceil A\rceil$ מוגדרת. [רמז: עקרון ארכימדס.]

4 המספרים המרוכבים

בניית המרוכבים קלה יותר מבחינה טכנית. נעשה זאת בקיצור נמרץ.

קבוצת המספרים המרוכבים היא $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. הרעיון הוא לזהות את הביטוי הלא פורמאלי $a+bi$ (כאשר $i^2=-1$) עם הזוג $\langle a,b\rangle$. מגדירים את הפעולות הבאות על $\mathbb{C}$:

- **חיבור**: $\langle a,b\rangle+\langle c,d\rangle=\langle a+c,b+d\rangle$.
- **כפל**: $\langle a,b\rangle\cdot\langle c,d\rangle=\langle ac-bd,ad+bc\rangle$.

קל לראות שפעולות אלה מעניקות ל $\mathbb{C}$ מבנה של שדה.

נותר לנו להראות שיכון טבעי של $\mathbb{R}$ ב $\mathbb{C}$.

4.1 תרגיל. **נגדיר** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ **על ידי** $f(r)=\langle r,0\rangle$. **הראה ש** f **שיכון, כלומר חד-חד ערכית, ושומרת על חיבור וכפל.**

אנו מזהים מספר ממשי r עם השיכון שלו $\langle r,0\rangle$. כמו כן, נסמן $i=\langle 0,1\rangle$.

4.2 תרגיל. **בהתאם לזיהוי הנ"ל, הוכח:**
א. לכל a,b **ממשיים מתקיים** $a+bi=\langle a,b\rangle$.
ב. $i^2=-1$.

5 מבט על

בכל הרחבה שביצענו, השתמשנו בשיכון של המערכת הקטנה במערכת הגדולה. הראנו את השיכונים הבאים:

$$\mathbb{N}\hookrightarrow\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}\hookrightarrow\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{C}.$$

לפי זה, למשל, כאשר אנו אומרים ש $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$, אנו מדברים בעצם על העותק של $\mathbb{N}$ שמוכל ב $\mathbb{Z}$. למה אנו מתכוונים כאשר אנו אומרים ש $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}$?

ניעזר בסימונים הבאים:

$\mathbb{N}_1$ – העותק של $\mathbb{N}$ ב $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}_1$ – העותק של $\mathbb{Z}$ ב $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}_1$ – העותק של $\mathbb{Q}$ ב $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}_1$ – העותק של $\mathbb{R}$ ב $\mathbb{C}$.

העניין הוא, שכאשר $\mathbb{Z}$ משוכן ב $\mathbb{Q}$, גם העותק $\mathbb{N}_1\subseteq\mathbb{Z}$ של $\mathbb{N}$ משוכן **יחד עם** $\mathbb{Z}$ בתוך $\mathbb{Q}$. לכן אפשר לדבר על עותק $\mathbb{N}_2$ של $\mathbb{N}$ בתוך $\mathbb{Q}$. באותו אופן, יש לנו:

עותק $\mathbb{N}_3$ של $\mathbb{N}$ ועותק $\mathbb{Z}_2$ של $\mathbb{Z}$, והעותק $\mathbb{Q}_1$ של $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.
עותק $\mathbb{N}_4$ של $\mathbb{N}$, עותק $\mathbb{Z}_3$ של $\mathbb{Z}$, עותק $\mathbb{Q}_2$ של $\mathbb{Q}$, והעותק $\mathbb{R}_1$ של $\mathbb{R}$ בתוך $\mathbb{C}$.

בציור:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{N}_4 & \subseteq & \mathbb{Z}_3 & \subseteq & \mathbb{Q}_2 & \subseteq & \mathbb{R}_1 & \subseteq & \mathbb{C} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{N}_3 & \subseteq & \mathbb{Z}_2 & \subseteq & \mathbb{Q}_1 & \subseteq & \mathbb{R} & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
\mathbb{N}_2 & \subseteq & \mathbb{Z}_1 & \subseteq & \mathbb{Q} & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \\
\mathbb{N}_1 & \subseteq & \mathbb{Z} & & & & & & \\
\uparrow & & & & & & & & \\
\mathbb{N} & & & & & & & &
\end{array}$$

לכן, מבחינה פורמאלית, כשמדברים על איברים של $\mathbb{C}$, "מספר ממשי" הוא איבר של $\mathbb{R}_1$, "מספר רציונלי" הוא איבר של $\mathbb{Q}_2$, "מספר שלם" הוא איבר של $\mathbb{Z}_3$, ו"מספר טבעי" הוא איבר של $\mathbb{N}_4$. אם רוצים להיות פורמאליים, אפשר למשל להגדיר "מחדש" $\mathbb{N}{=}\mathbb{N}_4$, $\mathbb{Z}{=}\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}{=}\mathbb{Q}_2$, ו $\mathbb{R}{=}\mathbb{R}_1$. כדי להמנע מהגדרה מעגלית, חוזרים על כל ההגדרות שלנו כאשר מגדירים קבוצות $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}_0$ וכולי, במקום הקבוצות $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ וכולי שהגדרנו, ואז הדיאגרמה תיראה כך:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{N} & \subseteq & \mathbb{Z} & \subseteq & \mathbb{Q} & \subseteq & \mathbb{R} & \subseteq & \mathbb{C} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{N}_3 & \subseteq & \mathbb{Z}_2 & \subseteq & \mathbb{Q}_1 & \subseteq & \mathbb{R}_0 & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
\mathbb{N}_2 & \subseteq & \mathbb{Z}_1 & \subseteq & \mathbb{Q}_0 & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \\
\mathbb{N}_1 & \subseteq & \mathbb{Z}_0 & & & & & & \\
\uparrow & & & & & & & & \\
\mathbb{N}_0 & & & & & & & &
\end{array}$$

כעת האמירה $\mathbb{N}{\subseteq}\mathbb{Z}{\subseteq}\mathbb{Q}{\subseteq}\mathbb{R}{\subseteq}\mathbb{C}$ היא מדוייקת. הדיון הזה חשוב רק כדי להבין שאין סתירות בין ההגדרות שלנו למתמטיקה הסטנדרטית. למותר לציין שאין צורך לחוש לדקויות אלו מעבר לכך. אנו נמשיך לזהות את $\mathbb{N}$ עם ω.

5.1 תרגיל. נסה להסביר את יתרונה של הגישה הראשונה (עותקים) על פני הגישה השניה. [רמז: מה קורה כאשר רוצים לשכן את $\mathbb{C}$ בתוך מבנה "יותר גדול", כאשר מעוניינים לשמור גם על תת-הקבוצות הנ"ל של $\mathbb{C}$?]

נספח ב: קריאה נוספת

בחוברת זאת הצגנו את הכלים הבסיסיים של תורת הקבוצות המודרנית, ואף ראינו מספר יישומים שלהם. ההצגה שלנו, מעצם אופי הנושא, לא יכלה להיות ממצה. להלן מספר הצעות לקריאה נוספת והרחבת הידע, לפי סדר הופעת הנושאים בחוברת.

השפה של תורת הקבוצות היא מקרה פרטי של תחום בלוגיקה הנקרא **שפות פורמאליות**, או **לוגיקה מסדר ראשון**. הקורא מופנה לספר המצויין *The Incompleteness Phenomenon* (של מרטין גולדשטרן וחיים יהודה) להבנת הנושא בצורה מקיפה ומדוייקת יותר.

האקסיומות של תורת הקבוצות שהבאנו כאן הן וריאציה קלה (תרתי משמע!) של אלו שהובאו בספר *Set Theory* (של Kenneth Kunen). בספר זה האקסיומות מוצגות בצורה מעט יותר חלשה מאשר אצלנו. כדאי לעיין שם ולהבין את ההבדל. יש שם גם דיונים מעניינים בנושאים פורמאליים שלא הקפנו בחוברת זו. המתעניין בשאלה "מדוע דווקא אלו האקסיומות של תורת הקבוצות" יהנה מן הסתם מהמאמר על האקסיומות של תורת הקבוצות, המופיע בספר *Handbook of Mathematical Logic*. הספר *Set Theory* של Jech מתאים אף הוא להעמקה והרחבה של הידע.

הנושא של **סדרים חלקיים** פיתח חיים משל עצמו, והפך לנושא חשוב מאד במתמטיקה, המסתעף על פני תת-תחומים רבים, כגון: סריגים, מטרואידים, ועוד. אנו הצגנו רק את מה שהיה הכרחי כדי להבין את הגדרת הסודרים. המעוניין להרחיב ידיעותיו בתחום זה – יוכל להתחיל עם הדוגמא מהספר של גולדשטרן ויהודה הנ"ל, עמ' 162 ואילך, ולהמשיך עם כל אחד מעשרות הספרים שיש בתחומים שציינו.

למושג **סודרים** יש הרחבה מאד מעניינת שנקראת **על-ממשיים** (surreals). להצגה פשוטה ולא פורמאלית של הנושא (שגם תעזור להבנה אינטואיטיבית טובה יותר של נושא הסודרים), ראה בפרק המתאים בספר *The Book of Numbers* (של Conway ו Guy).

הרחבה, או המשך, של הנושא **מערכות של מספרים** היא, פחות או יותר, כל המתמטיקה הידועה לנו ... אפשר לחלק בצורה גסה את המתמטיקה לקטגוריות לפי הבחירה לאיזה תכונות של הממשיים מבצעים את האבסטרקציה. בכל אופן, אנו מקווים שהקורא יזהה את הרעיונות שהופיעו בנספח זה גם בתוך נושאים אחרים שאותם ילמד.

משפט Cantor–Bendixon הוא רק דוגמא אחת מתחום רחב שנקרא **אנליזה של הישר הממשי**, ובפרט **תורת הקבוצות התיאורית** (descriptive set theory). המעוניין להרחיב ידיעותיו בתחום האחרון ישמח לעיין בספר *Classical Descriptive Set Theory* (של Kechris), ואם הוא לא שבע, הספר עב הכרס

Descriptive Set Theory (של Moscovakis) צריך לעשות את העבודה ...

על **גירסאות של אקסיומת הבחירה** כדאי לקרוא בספר *Equivalents of the Axiom of Choice* (של Rubin ו Rubin).

ההמשך הטבעי של החוברת הוא **תורת הכפיה**, שאליה רק רמזנו כאשר ציינו שלא ניתן להוכיח ולא להפריך את השערת הרצף מתוך שאר האקסיומות. מסתבר שיש השערות רבות שלא ניתן להוכיח ולא להפריך, ותורת הכפיה נותנת את הכלים לעשות זאת. תורה עמוקה זאת תהיה קשה, כנראה, לתלמידים שזה עתה סיימו את שנתם הראשונה באוניברסיטה. מבוא טוב לנושא, המתאים לתלמידים מתחילים, אפשר למצוא בספר Introduction to Set Theory של Hrbacek ו Jech. המקור הכי קריא שאני מכיר ללימוד ראשוני בנושא הוא הספר Set Theory for the Working Mathematician של Ciesielski.

נספח ג: שאלות ממבחנים ישנים

בפרק זה נקבץ יחד שאלות ממבחנים שניתנו במחלקתנו בשנים עברו, לפי נושאים (במקרה שהשאלה נוגעת לשני נושאים או יותר, בחרנו באחד מהם לפי טעמנו). יובאו כאן רק השאלות שהחומר הדרוש להן מופיע בחוברת זאת. שאלות שהיו דומות לשאלות המופיעות בגוף החוברת לא נכללו כאן, להקטנת יתרות. גם שאלות מהצורה "ספר כל מה שאתה יודע על ... (אקסיומת הבחירה, השערת הרצף, וכו')", וכן שאלות מהצורה "הגדר ..." אינן מופיעות כאן.

למותר לציין, שאין השאלות מכסות את כל המופיע בגוף החוברת. בבחינות הישנות שבידי לא מופיעים הנושאים: אקסיומות ZFC, ומשפט Cantor–Bendixon.

אשמח לקבל שאלות מבחינות חדשות.

הבחינות נכתבו על ידי פרופ' פייגלשטוק ופרופ' שויקה. הגירסאות המובאות כאן מותאמות לסימונים בחוברת.

סדרים

1. יהא $\langle A,R\rangle$ סדר טוב, ותהא $f{:}A\to A$ פונקציה חד–חד ערכית המקיימת $f(a)\leq_R a$ לכל $a\in A$. הוכח ש f היא העתקת הזהות על A (כלומר לכל $a\in A$, $f(a)=a$).

2. תהא A קבוצה סדורה היטב.

א. תהא $B\subseteq A$ המקיימת: לכל $a\in A$, אם $\overset{a}{A}\subseteq B$, אז $a\in B$. הוכח ש $B=A$.

ב. בעזרת (א), הוכח שאם $f{:}A\to A$ איזומורפיזם סדר, אז f היא פונקצית הזהות על A.

3. יהיו A,B קבוצות סדורות היטב, ויהיו $a\in A, b\in B$ כך ש $\overset{a}{A}\cong\overset{b}{B}$. הוכח שלכל $b\neq\tilde{b}\in B$, $\overset{a}{A}\not\cong\overset{\tilde{b}}{B}$.

4. יהא $\langle A,R\rangle$ סדר טוב, ותהא $f{:}A\to A$ פונקציה שומרת סדר. הוכח שלכל $a\in A$, $a\leq_R f(a)$.

5. יהיו A,B קבוצות סדורות היטב, ויהיו $f{:}A\to B$ ו $g{:}B\to A$ איזומורפיזמי סדר. הוכח: $g=f^{-1}$.

סודרים

1. הוכח ש ω סדורה היטב על ידי $\in$.

2. האם כל קבוצה של סודרים היא סדורה היטב? אם כן, מה ניתן לומר על ה type שלה?

3. הוכח שלכל $n\in\omega$ מתקיים $\omega\cdot n<\omega\cdot\omega$.

4. הוכח שלכל $n\in\omega$ מתקיים $\omega+n<\omega+\omega$.

5. הוכח שלכל n טבעי, $n\cdot\omega=\omega$.

6. הוכח: $(\omega+\omega)\cdot(\omega+\omega)=\omega^2\cdot 2$, ולכל $1<n<\omega$, $\omega\cdot n\neq\omega$.

7. יהא α סודר אינסופי, ויהא n סודר סופי. הוכח:

א. $n+\alpha=\alpha$.

ב. $\alpha<\alpha+n$.

8. יהיו α,β סודרים, $0<\beta$. הוכח ש $\alpha<\alpha+\beta$.

9. יהא α סודר. הוכח: $\alpha\cdot 2=\alpha+\alpha$.

10. יהא α סודר. הוכח שלכל n טבעי, $\alpha+n<\alpha+(n+1)$.

11. יהיו $n\leq m\in\omega$. הוכח שקיים $k\in\omega$ כך ש $m=n+k$.

12. יהיו $\alpha\leq\beta$ סודרים. הוכח שקיים סודר γ כך ש $\beta=\alpha+\gamma$. [רמז (לכן אופיע בבחינה!): אינדוקציה טרנספיניטית על β.]

13. נתון $\alpha=\beta\cdot\gamma_1+\rho_1=\beta\cdot\gamma_2+\rho_2$, כאשר כל הפעולות הן על סודרים, $0<\alpha,\beta$, וכן $0\leq\rho_1,\rho_2<\beta$. הוכח: $\rho_1=\rho_2$, וכן $\gamma_1=\gamma_2$.

14. הוכח או הפרך את הטענות הבאות בנוגע לחזקות סודרים:

א. $(\alpha\cdot\beta)^\gamma=\alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$.

ב. אם $\alpha^\beta=\alpha^\gamma$, אז $\beta=\gamma$.

עוצמות

1. יהיו A,B קבוצות סופיות וסדורות היטב, כך ש $|A|=|B|$. הוכח שקיים איזומורפיזם סדר $f:A\to B$.

2. יהיו $a<b,c<d$ מספרים ממשיים. מצא מיפוי $f:[a,b]\to(c,d)$. [רמז (לא אופיע בבחינה!): מצא איפוי $g:(a,b)\to(c,d)$, והשתמש בפרדוקס "מלון הילברט" על $(c,d)\cap\mathbb{Q}$ כדי לפנות מקום לנקודות הנותרות a,b.]

3. תהא $f:\mathbb{R}\to A$ מיפוי (חד-חד ערכית ועל), ויהא $b\notin A$. בנה מיפוי $g:\mathbb{R}\to A\setminus\{b\}$.

4. תהא $C=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$. מצא מיפוי $f:C\to[0,1]$. [רמז (לא אופיע בבחינה): היעזר באיפוי $g:C\to[0,1)$.]

5. תהא $B=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 : 2<x\le 3,\ 2<y\le 3\}$. מצא מיפוי $f:B\to[0,1]$.

6. מצא מיפוי $f:(1,2)\cup\mathbb{N}\to(2,3)$. [רמז (לא אופיע בבחינה): היעזר באיפוי $h:\mathbb{N}\cup((1,2)\cap\mathbb{Q})\to(1,2)\cap\mathbb{Q}$.]

7. מצא מיפוי מהמעגל $C=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ לריבוע $S=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 : 0\le x,y\le 1\}$. [רמז: העתק חצי המעגל לקטע, וחצי הקטע לריבוע.]

8. בנה מיפוי $f:(0,1]\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

9. בנה מיפוי $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$.

10. תהא A קבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים. הוכח, מבלי להשתמש במשפט על כפל של עוצמות, ש $A\times A\approx A$.

11. נסמן $\aleph=|\mathbb{R}|$. חשב:

א. $\aleph\otimes\aleph_0\otimes 2^{\aleph_0}$.

ב. $\aleph^{\aleph}$.

ג. $\aleph_0^{\aleph_0}$.

ד. $\aleph_0^{\aleph}$.

ה. $\aleph^{\aleph_0}$.

12. חשב את עוצמת כל הקבוצות הסופיות החלקיות לקבוצת המספרים המרוכבים.

13. חשב את עוצמת כל הקבוצות הסופיות החלקיות לקבוצת המספרים הטבעיים.

14. מצא את העוצמה של קבוצת כל הקבוצות בנות המניה החלקיות לקבוצת הממשיים.

15. חשב את עוצמת קבוצת כל הסדרות המונוטוניות (עולות ממש) של מספרים טבעיים.

16. חשב את העוצמה של קבוצת כל הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים.

17. תהא A קבוצה אינסופית. הוכח: A בת מניה $\Leftrightarrow$ לכל $C\subseteq A$ אינסופית מתקיים $A\approx C$.

18. א. תהא A קבוצה אינסופית, ותהא B קבוצה בת מניה. הוכח: $|A\cup B|=|A|$.

ב. תהא $S=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 : (x=0 \wedge y\in\mathbb{N})$ או $(x\in\mathbb{R} \wedge y=0)\}$. הוכח ש $|S|=|\mathbb{R}|$.

19. תהא L קבוצת כל הקוים במישור. מצא את $|L|$.

20. הוכח שלכל טבעי $1<n$ מתקיים $n^{\aleph_0}=\aleph$.

21. תהא $\mathbb{R}[[x]]$ קבוצת כל טורי החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. הוכח ש $|\mathbb{R}[[x]]|=\aleph$.

22. הוכח:

א. $|\mathbb{R}|^{\aleph_0}=|\mathbb{R}|$.

ב. $|\mathbb{N}|^{\aleph_0}=|\mathbb{R}|$.

23. תהא $\mathbb{Q}[x]$ קבוצת הפולינומים עם מקדמים ב $\mathbb{Q}$. הוכח: $|\mathbb{Q}[x]|=\aleph_0$.

24. תהא $\{A_i : i\in I\}$ משפחה של קבוצות, כך ש $|I|\leq 2^{\aleph_0}$, ולכל $i\in I$, $|A_i|\leq 2^{\aleph_0}$. הוכח או הפרך: $|\bigcup_{i\in I}A_i|\leq 2^{\aleph_0}$.

25. תהא C קבוצה אינסופית. הוכח: $|\mathcal{P}(C)|=|\{1,2,5,7\}^C|$.

26. הוכח שהקטע הממשי $[0,1)$ אינו קבוצה בת מניה.

27. האם כל קבוצה אינסופית סדורה היטב היא בהכרח בת מניה?

28. יהיו A,B קבוצות כך ש $|A|=\aleph$, ו B סופית. הוכח ש $|{}^{B}A|=\aleph$.

29. יהיו κ,λ מונים כך ש $\kappa\leq\lambda$. הוכח שלכל מונה μ, $\mu^{\kappa}\leq\mu^{\lambda}$.

30. א. הוכח מההגדרות של כפל וחזקת מונים בלבד, שלכל מונה אינסופי κ מתקיים $\kappa^2=\kappa\otimes\kappa$.
ב. מצא מונים $1<\kappa<\lambda$ ו $1<\mu$ כך ש $\mu^{\kappa}=\mu^{\lambda}$.

31. הוכח או הפרך: לכל שני מונים $2\leq\kappa\leq\lambda$ מתקיים $\kappa^{\lambda}=2^{\lambda}$.

32. האם, ומתי, יכול להתקיים $\kappa\oplus\lambda=\kappa\otimes\lambda$, כאשר κ,λ מונים אינסופיים.

33. יהא κ מונה כך ש $\kappa\oplus 1=\kappa$. הוכח ש κ מונה אינסופי.

34. יהיו κ,λ מונים כך ש $\kappa\leq\lambda$ וכן $\lambda\leq\kappa$. הוכח ש $\kappa=\lambda$.

35. האם $2^{\aleph_3}=\aleph_4$?

36. הוכח או הפרך: אם $\kappa<\lambda$ וכן $\mu<\sigma$ מונים, אז $\kappa\oplus\mu<\lambda\oplus\sigma$, וכן $\kappa\otimes\mu<\lambda\otimes\sigma$.

37. יהיו κ,λ,μ מונים אינסופיים. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. $\kappa\leq\lambda \;\rightarrow\; \kappa\oplus\mu<\lambda\oplus\mu$.
ב. $\kappa\oplus\mu<\lambda\oplus\mu \;\rightarrow\; \kappa<\lambda$.

מערכות של מספרים

1. הוכח שלכל $x=[\langle n,m\rangle]\in\mathbb{Z}$, $0\leq x^2(=x\cdot x)$, וכן $x^2=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$.

2. יהא $a=[\langle n,m\rangle]\in\mathbb{Z}$, כך ש $a^2=1$. הוכח ש $a=1=[\langle 1,0\rangle]$, או $a=-1=[\langle 0,1\rangle]$.

3. יהיו $x,x_1,x_2\in\mathbb{Z}$, כך ש $x_1<x_2$. הוכח:

א. $x+x_1<x+x_2$.

ב. אם $0<x,x_1,x_2$, אז $x\cdot x_1<x\cdot x_2$.

4. יהיו $\frac{n_1}{m_1},\frac{n_2}{m_2}\in\mathbb{Q}$. נגדיר פעולה "/" על ידי $\frac{n_1}{m_1}/\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_1\cdot m_2}{m_1\cdot n_2}$. הוכח שהפעולה מוגדרת היטב, דהיינו בלתי תלויה בנציגים.

5. נגדיר $f:\mathbb{Q}\setminus\{0\}\to\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ על ידי $f(\frac{a}{b})=\frac{b}{a}$ לכל $a,b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. הוכח ש f מוגדרת היטב. [הדרכה: המספר $\frac{a}{b}$ הוא מחלקת שקילות. יש להוכיח שלכל $\langle c,d\rangle\in\frac{a}{b}$ מתקיים $f(\frac{c}{d})=f(\frac{a}{b})$.

6. יהא $q=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, המקיים $0<q<1$. הוכח ש $q^2<q$.

7. יהא x חתך דדקינד. הוכח ש $0\cdot x=0$.

8. יהא a חתך. הוכח שקיים חתך x כך ש $x^3=a$ (הפרד בין המקרים $0\leq a$ ו $a<0$).

9. יהא x חתך דדקינד. הוכח: $1\cdot x=x$.

10. א. יהא x חתך דדקינד, ויהא n מספר טבעי. הוכח שקיים $a\in x$ כך ש $a+\frac{1}{n}\notin x$.

ב. יהא $1<x$ חתך דדקינד. הוכח ש $x<x\cdot x$. [רמז: היעזר ב(א).]

11. יהא x חתך דדקינד, כך ש $x<0$. הוכח ש $x<-x$.

12. בהנחה שהוכח שלכל חתך $0<A$ יש חתך הופכי B כך ש $AB=1$, הוכח שזה נכון לכל חתך A.

13. הוכח שאם $0<A,B$ חתכים, אז $0<A\cdot B$.

אקסיומת הבחירה

1. יהיו A,B קבוצות, ותהא $S\subseteq A\times B$ כך שלכל $a\in A$ קיים $b\in B$ (לאו דווקא יחיד) כך ש $\langle a,b\rangle\in S$.
הוכח, בעזרת הלמה של צורן, שקיימת פונקציה $f:A\to B$ כך ש $f\subseteq S$.

2. תהא $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{N}\setminus\{0\}$. הוכח שבאוסף $\mathcal{F}=\{A : A\subseteq X \wedge \forall a,b\in A\ (a|b \vee b|a)\}$ (כאן $a|b$ פירושו: a

אחלק את b) קיים איבר מקסימלי לגבי הכלה. (מותר להשתמש בכל התכונות של מספרים טבעיים שאתה מכיר.)

5. תהא A קבוצה עם יחס סדר חלקי R. תהא $S=\{B\subseteq A : \langle B,R\rangle \text{ סדר קוי}\}$. הוכח שקיים ב S איבר M שהוא מקסימלי ביחס להכלה $\subseteq$, כלומר $M\in S$ ולכל $B\in S$, אם $M\subseteq B$ אז $B=M$.

6. תהא $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ סדורה חלקית ביחס להכלה $\subseteq$, כך ש $\emptyset\in\mathcal{S}$ ולכל אוסף $\{A_i : i\in I\}\subseteq\mathcal{S}$, $\bigcup_{i\in I} A_i\in\mathcal{S}$.

תהא $\mathcal{T}=\{A\in\mathcal{S} : \emptyset\notin A\}$. הוכח שקיים ב $\mathcal{T}$ איבר מקסימלי ביחס להכלה.

7. יהא S יחס על X. הוכח שבקבוצה $\{T\subseteq S \text{ יחס טרנזיטיבי על } X : T\}$ קיים איבר מקסימלי לגבי הכלה.

8. האם הוכחת משפט Cantor–Bernstein דורשת את אקסיומת הבחירה?