

בחינה בקורס תורת הקבוצות (88-202-01) – מועד א

אוניברסיטת בר-אילן, יום ד', כ"ד שבט תשע"ט (30.1.19)

מרצה: פרופ' בועז צבאן.

מתרגלת: תמר בר-און.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. השתדל לענות על כל השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. המבחן הוא בשיטת "צבור כפי יכלתך":

הניקוד הכולל על כל שאלה הוא 35 נקודות או יותר.

עד 10 נקודות בונים יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות התשובות.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה: גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

א. נסח את המשפט המלא של Ulam לגבי האפשרויות השונות לקיום מידה שלמה (על קבוצה כלשהי, על קטע היחידה, וכזו המרחיבה את מידת לבג).

ב. תאר בקיצור נמרץ את הצעדים העיקריים בהוכחת המשפט. אין צורך להוכיח דבר בסעיף זה, רק לתאר את השלבים במהלך המוביל למשפט המלא, ומהם המושגים המרכזיים בהם משתמשים בשלבים אלה.

תשובה:

שאלה 2

לכל אורך שאלה זו, נניח את השערת הרצף המוכללת (GCH).

א. יהיו λ, κ מונים כך שלפחות אחד מהם אינסופי. הוכח:

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+ & \kappa \leq \lambda \\ \kappa^+ & \text{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \\ \kappa & \lambda < \text{cf}(\kappa) \end{cases}$$

ב. חשב את החזקות הבאות (ונמק את חישובך):

$$\begin{aligned} 2^{\aleph_0} &= ? \\ \aleph_\omega^{\aleph_0} &= ? \\ \aleph_\omega^{\aleph_\omega} &= ? \\ (\aleph_{\aleph_1})^{\aleph_0} &= ? \end{aligned}$$

תשובה:

שאלה 3

יהיו $f: \alpha \rightarrow \beta, g: \beta \rightarrow \gamma$ פונקציות קופינליות. הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם f שומרת סדר אז הפונקציה $g \circ f: \alpha \rightarrow \gamma$ קופינלית.

ב. אם g שומרת סדר, אז הפונקציה $g \circ f: \alpha \rightarrow \gamma$ קופינלית.

תשובה: