בחינה בקורס **תורת הקבוצות** (88־202־01) – מועד ב

אוניברסיטת בר־אילן, יום ה', ג' ניסן תשע"ז (30.3.17)

מרצה: בועז צבאן.

מתרגלת: תמר בר־און.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. השתדל לענות על כל השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. המבחן הוא בשיטת "צבור כפי יכלתך":

הניקוד הכולל לכל שאלה הוא 35 נקודות או יותר.

עד 10 נקודות בונוס יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות התשובות.

שאלה	**ניקוד**
1	
2	
3	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה: גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

(15 נק') **א.** הגדר את $\aleph_\alpha$, לכל סודר α.

(25 נק') **ב.** הוכח שלכל זוג סודרים $\alpha < \beta$, מתקיים $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

תשובה:

שאלה 2

(25 נק') **א.** יהיו G חבורה אינסופית, $S \subseteq G$ תת־קבוצה אינסופית, ו $H = \langle S \rangle$ התת־חבורה של G הנוצרת על ידי הקבוצה S.

הוכח: $|H| = |S|$.

הדרכה: נגדיר ברקורסיה על הסודרים: $H_0 := S$, $H_{\alpha+1} := H_\alpha \cup \{xy, x^{-1} : x, y \in H_\alpha\}$, ועבור סודר גבולי α, $H_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta$. הוכח ש $H = H_{\omega+1} = H_\omega$.

(10 נק') **ב.** הוכח שלכל חבורה אינסופית יש תת־חבורה שעוצמתה $\aleph_0$.

תשובה:

שאלה 3

נזכור שקבוצה של וקטורים במרחב וקטורי היא בסיס אם ורק אם היא קבוצה בלתי תלויה לינארית מקסימלית, כלומר: הקבוצה בלתי תלויה לינארית, וכל וקטור שנוסיף לה יהפוך אותה לתלויה לינארית.

הוכח בצורה מדוייקת, בעזרת רקורסיה טרנספיניטית, שלכל מרחב וקטורי יש בסיס.

הדרכה כללית: אין להשתמש בלמה של צורן. יש לממש בצורה פורמלית את הרעיון "נתחיל מהקבוצה הריקה, וכל עוד אין לנו קבוצה בלתי תלויה לינארית מקסימלית, נוסיף לה עוד וקטור כך שהיא נשארת בלתי תלויה לינארית."

תשובה: