

בחינה בקורס תורת הקבוצות (01-202-88) – מועד א

אוניברסיטת בר-אילן, יום ד', כ"ו שבט תשע"ז (22.2.17)

מרצה: פרופ' בועז צבאן.

מתרגלת: תמר בר-און.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. השתדל לענות על כל השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטייטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. המבחן הוא בשיטת "צבור כפי יכלתך".

הניקוד הכולל על כל שאלה הוא 35 נקודות או יותר.

עד 10 נקודות בונים יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות התשובות.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה: גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח, בעזרת האקסיומות של תורת הקבוצות (ZFC), שלכל שתי קבוצות A ו B , מכפלתן הקרטזית $A \times B$ היא קבוצה.

תשובה:

שאלה 2

א. הגדר: קבוצה פרפקטית.

(5 נק')

ב. הגדר: הנגזרת ה- α של קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}$ (המסומנת $X^{(\alpha)}$), עבור סודר כללי α .

(10 נק')

ג. הוכח את משפט קנטור-בנדיקסון, האומר שכל קבוצה סגורה שאינה בת-מניה היא איחוד של קבוצה פרפקטית וקבוצה בת-מניה.

(20 נק')

תשובה:

שאלה 3

בפתרון שאלה זו, מותר להשתמש בעובדות בסיסיות לגבי קבוצות עם מידת לבג אפס (איחוד בן מניה של קבוצות ממידה אפס הוא ממידה אפס, קבוצות עם איבר אחד מידתן אפס, וכדומה). לא נדרש בשאלה ידע מתקדם לגבי מידה אפס.

נניח שהשערת הרצף (CH) מתקיימת. נתון שיש משפחה של קבוצות $\{A_\alpha : \alpha < \aleph_1\} \subseteq P(\mathbb{R})$ עם התכונות הבאות:

- לכל סודר $\alpha < \aleph_1$, מידת לבג של הקבוצה A_α היא אפס.
- לכל קבוצה A עם מידת לבג אפס, יש סודר $\alpha < \aleph_1$ כך שמתקיים $A \subseteq A_\alpha$.

לכל סודר $\alpha < \aleph_1$, נבחר מספר ממשי $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$.

א. הסבר מדוע, לכל סודר $\alpha < \aleph_1$ נתון, קיים מספר ממשי x_α כנ"ל. (10 נק')

ב. הוכח שעוצמת הקבוצה $S := \{x_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ היא \aleph_1 . (10 נק')

ג. הוכח שלכל קבוצה A עם מידת לבג אפס, החיתוך $S \cap A$ הוא בן מניה. (15 נק')

תשובה: