

= ערך בעיית המידה ל לבד =

\* ההכרחי למבוסס על T. Tech ("מבוסס" המילניארי).

\* **מידה** מ על ס-אלגברה ל רבונג  $P(X) \geq \mathcal{A}$ :

1.  $\mu(X) = 1$  (מידה הסתברות);  $\mu(\emptyset) = 0$ .

2. מונוטוניות:  $A \subseteq B \rightarrow \mu A \leq \mu B$  ( $A, B \in \mathcal{A}$ ).

3. למ-ריוואלי:  $\mu(\{a\}) = 0$  ( $a \in X$ ).

4. ס-אדוויגו:  $X_n \in \mathcal{A}$  זרים בזוגות  $\leftarrow \mu(\bigcup_n X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n)$ .

(ברור,  $\mu(A) \leq 1$  לכל  $A \in \mathcal{A}$ ).

\* דוגמא: מידה לבד על  $\mathcal{A} =$  קב' גורח  $[0,1]$ , או  $\mathcal{A} =$  קב' מדינה לבד  $[0,1]$ .

\* למידה לבד גבוהה (נספח): אינו ריאליזם להכנה  $\mu(A) = \mu(A+t)$   $t \in [0,1], A \in \mathcal{A}$ .

\*  $[0,1]$  עם  $1 + \sqrt[n]{n}$  (קומפני) ולכן יש לה רך מידה אחרת אינו ריאליזם להכנה ( $\Rightarrow$  מידה לבד).

\* לערה: יש רבונג  $\geq [0,1]$  שאינה מדינה-לבד.

הוכחה: נלמד באינו ריאליזם להכנה: יהא  $M \subseteq [0,1]$  מירבית עם המבנה  $\mathbb{Q}$ - $x$  לכל  $x, y \in M$ .  
(Vitali). אזי קבור  $q_1 \neq q_2$  רציונלים בקב'  $M+q_1, M+q_2$  זרים.

$$[0,1) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} M+q$$

$$\text{לכן אילו } M \text{ מדינה, אז } 1 = \mu([0,1)) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(M+q) \stackrel{= \mu(M)=0}{=} 0$$

\* אנו מתחננים בשאלה/ור:

א. האם יש הרחבה למידה לבד על  $[0,1]$  כך לכל רבונג  $\geq [0,1]$  מדינה?

ב. האם יש מידה כלשהי על  $[0,1]$   $P([0,1])$ ?

ג. האם יש רבונג כלשהי  $S$  כך שיש מידה על  $P(S)$ ?

המשובת לשאלות מאז מבניעל.



\* כמה הערכות קולט:

1. קיום/אי-קיום מידה על  $P(X)$  תלוי רק ב  $|X|$ .
2. אם יש מידה על קבוצה שזוהי  $\mu$ , אז לכל קבוצה  $X$  שזוהי  $\mu \leq \mu$ , יש מידה על  $X$ .

$$\mu(A) = \mu(A \cap X) \quad \mu(A) = \mu(A \cap X) \quad \mu(A) = \mu(A \cap X)$$

השאלה העניינית היא, מהי הקבוצה המינימלית  $\mu$  כך שיש מידה על  $P(X)$ . (כלומר  $P(X)$  באשר  $|X|$ )  
 = הדיוק הקנה בלתי-  
 \* הערה: גודל  $\mu$  מידה על  $P(S)$ . נסמן  $\mathcal{M}_\mu = \{A \subseteq S : \mu(A) = 0\}$  (הקבוצה המידה 0).

\* הערה:  $\mu \leq P(S)$  אינדיקטור, לא-ראשי,  $\sigma$ -אדיטיבי, והמקסימום: כל אוסף של קבוצות שזוהי  $0 < \mu$  הוא בן-מניה.

הערה:  $I \subseteq P(X)$  אינדיקטור בחיוב  $\langle I, \Delta, \cap, \emptyset, X \rangle$ . שוויון:

$$\emptyset \in I \quad X \notin I \quad (i)$$

$$B \in I \leftarrow B \subseteq A \in I \quad (ii)$$

$$A \cup B \in I \leftarrow A, B \in I \quad (iii)$$

$$I \text{ ראשי} \quad \text{אם} \quad I = P(A) \quad A \subseteq X$$

$$I \text{ } \sigma\text{-אדיטיבי} \quad \text{אם} \quad A_n \in I \leftarrow \bigcup_n A_n \in I$$

הוכחה: (i)-(ii) מייצגת מידה.  
 (iii) נראה  $\sigma$ -אדיטיביות:

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_m (A_n \setminus \bigcup_{m < n} A_m)$$

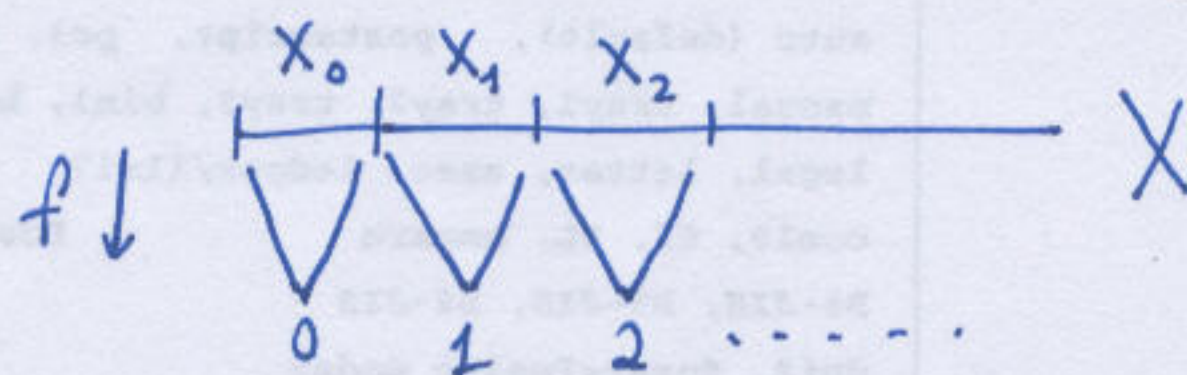
$\sigma$ -רווי: לכל  $n$ , "גבול"  $n$  מס' סופי  $n$  קבוצות שזוהי  $\leq \frac{1}{n}$ .

\* משפט: אכן  $\mu$  הקבוצה המינימלית כך שיש מידה על  $P(X)$ . אזי  $\mathcal{M}_\mu$   $\sigma$ -אדיטיבי.

(הערה:  $\mu$  במשפט לא יכול להיות בן מניה, כי אחרת  $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$  איחוד בן-מניה של זרועות ואז  $\mu(X) = 0$ ).

הוכחה: אחרת יש  $\mu < \mu$  וקבוצה  $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \in \mathcal{M}_\mu$  כך ש  $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha = X$ . אז  $\mu(X) = 0$ .

ע"י מעבר לקבוצה  $X_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$  אפשר להניח ש  $X_\alpha$  זרועות. נגדיר  $f: X \rightarrow \lambda$  ע"י



$$f \text{ משהי מידה על } P(\lambda) : \nu(Z) = \frac{1}{\mu(X)} \cdot \mu(f^{-1}[Z])$$



\* השערה 1:  $\sum_{i \in I} r_i := \sup \{ \sum_{i \in F} r_i : F \subseteq I, F \text{ סופית} \}$  (I לא בהכרח בין-מנייה), מאחר כאלו  $r_i \geq 0$ .

(אם  $\sum_{i \in I} r_i < \infty$ , אז כל  $r_i$  פה לך בת-מניה הוא 0).

(2) מידה מרעל  $P(S)$  היא ק-אדיטיבית אם: כאלו  $|I| < \aleph_0$ !  $X_i$  זרים:  $\mu(\bigcup_{i \in I} X_i) = \sum_{i \in I} \mu(X_i)$ .

\* משפט: אם  $\mu$  מידה מרעל  $P(S)$ !  $\mu$  ק-אדיטיבית, אז  $\mu$  ק-אדיטיבית.

הוכחה: נניח  $|I| < \aleph_0$ ;  $X_i$  ( $i \in I$ ) זרים. אז נן אנסף בין-מניה למיכס הם למידה  $\leq 0$  ( $\mu$  ס-רווי).

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in D} X_i \cup \bigcup_{i \in I \setminus D} X_i$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 בת-מניה מנייה 0

$$\mu(\bigcup_{i \in I} X_i) = \mu(\bigcup_{i \in D} X_i) + 0 = \sum_{i \in D} \mu(X_i)$$

$$\sum_{i \in I} \mu(X_i)$$

\* מסקנה: אם  $A$  קבוצה המינימלית בן שיש מידה מרעל  $P(A)$ , אז  $\mu$  ק-אדיטיבית.

בהר, אם  $|A| < \aleph_0$ , אז  $\mu(A) = 0$ .

= משפט בן-גורובסקי =

\* משפט (B-K): אם  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$  (CH), אז אין מידה מרעל  $P([0,1])$ .  
 נוכיח משפט יותר כללי, לממנו נובע משפט בן-גורובסקי למידה.

השערה 1: (א) נגזיר סדר  $\leq$  על  $N^N$  הניב-יכיב:  $f \leq g$  אם לכל  $n$ ,  $f(n) \leq g(n)$ .

(2) קבוצה  $F \subseteq N^N$  היא מאוצ'אל-חסומה אם לכל  $g \in N^N$ ,  $|\{f \in F : f \leq g\}| < |F|$ .

צוץ למאלר וקבוצות מאוצ'אל-חסומה

השערה 1: (א) נגזיר סדר  $\leq^*$  על  $N^N$  לפי:  $f \leq^* g$  אם למעל כל  $n$ ,  $f(n) \leq g(n)$ .

(2) קבוצה  $B \subseteq N^N$  היא חסומה אם יש  $g \in N^N$  כן לכל  $f \in B$ ,  $f \leq^* g$ .

(3) יהא  $[b]$  קבוצת המינימלית ל קבוצה לאינה חסומה.

הערה:  $\aleph_1 \leq b \leq 2^{\aleph_0}$ . (הוכחה...). אבל מיכס כמעט כל נונפיאריזיה שקולה על הפזר,

$$\aleph_1 < \aleph_{17} = b < \aleph_{101} = 2^{\aleph_0}$$

$$\aleph_1 = b = 2^{\aleph_0} \leftarrow CH$$



טענה: י'  $F \subseteq \mathcal{P}(S)$  רבונה לא-חסומה, לעצומה  $b$ .

הוכחה: ניקח רבונה  $\{f_\alpha: \alpha < b\}$  לא חסומה, ונבחר באינדוקציה על  $\alpha$ ,  $\{f_\alpha, g_\beta: \beta < \alpha\} \leq^* g_\alpha$ .

הבניה הנכונה היא מורה פהי על הבניה הבאה:

הערה:  $\mathcal{F}$  נקרא  $\sigma$ -אלגברה על רבונה  $S$  אם:

$$1. \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S).$$

$$2. S \in \mathcal{F} \text{ אבן } \emptyset \notin \mathcal{F}.$$

$$3. B \in \mathcal{F} \leftarrow B \supseteq A \in \mathcal{F}.$$

$$4. A \cap B \in \mathcal{F} \leftarrow A, B \in \mathcal{F}.$$

(במילים אחרות,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$  מסתם על  $S \Leftrightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S) \Rightarrow I = \{S \setminus A: A \in \mathcal{F}\}$  איזא).

\* הערה: נעזיר, עבור מסתם  $\mathcal{F}$  על  $N$ , סדר  $\leq_{\mathcal{F}}$  על  $N^N$  פהי:  $f \leq_{\mathcal{F}} g$  אם  $\{n: f(n) \leq g(n)\} \in \mathcal{F}$ .

מהא  $b(\mathcal{F})$  העוצמה המינימלית של רבונה  $\mathcal{F} \subseteq N^N$  לאינה חסומה ביחס  $\leq_{\mathcal{F}}$ .

\* לדוגמה:  $\mathcal{F} = \{A \subseteq N: N \setminus A \text{ finite}\} \leftarrow b(\mathcal{F}) = b$   $\mathcal{F} = \{A \subseteq N: n \in A\} \leftarrow b(\mathcal{F}) = \aleph_0$ .

\* טענה: לכל מסתם  $\mathcal{F}$ , י' רבונה לא-חסומה  $F \subseteq N^N$  לעצומה  $b(\mathcal{F})$ .

הוכחה: כמו קודם, בונים באינדוקציה רבונה  $\{g_\alpha: \alpha < b(\mathcal{F})\}$  על  $N^N$  לאינה חסומה ביחס  $\leq_{\mathcal{F}}$ , וכן לכל  $\alpha < \beta$  מתקיים  $g_\alpha \leq_{\mathcal{F}} g_\beta$ .

כל  $f \in N^N$ , ניקח  $\alpha < b(\mathcal{F})$  כן  $f \not\leq_{\mathcal{F}} g_\alpha$ . אז לכל  $\beta < \alpha$ ,  $g_\alpha \leq_{\mathcal{F}} g_\beta$  ואילו

$$\{ \beta \leq f : g_\beta \leq f \} \leq \alpha < b(\mathcal{F}) \text{ לפי } \frac{1}{4}.$$

\* משפט: אם י' רבונה לא-חסומה לעצומה  $\aleph$ ,

אז מיזוגה  $P(\aleph)$ ,

אז  $\mu$  אינה א-גדיליגית. (למעשה, י'  $\aleph < \aleph$  כן  $\mu(A) > 0$ ).

\* לדוגמה: מה ערך  $\aleph$  של  $B-K$ ?

$$\aleph_1 = b = 2^{\aleph_0} \leftarrow CH \text{ י' רבונה לא חסומה לעצומה } \aleph_1$$

$$\leftarrow \text{אין מיזוגה } (\aleph_1 - \text{אדיליגית}) \text{ על } P(\aleph_1) \approx P([0,1])$$

CH



הוכחה המלאה: גרסה  $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  נקראת  $\epsilon$ -רשתית אם  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  כזה שכל  $f, g \in F$  המקיימים  $|f(x) - g(x)| < \delta$  לכל  $x \in \mathbb{N}$  מקיימים  $|f(x) - g(x)| < \epsilon$  לכל  $x \in \mathbb{N}$ .

$$U_m^n = \{f \in F : f(n) \leq m\}$$

$1 - \frac{1}{2^n} \leq \mu(U_m^n)$  و  $\mu(U_m^n) \rightarrow \mu(F) = 1 \Leftrightarrow U_m^n \xrightarrow{m} F$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(F)$   $\mathbb{R}$   $\mathbb{N}$   $\mu$   $\mathbb{R}$

$$\mu(\bigcap_n U_{m_n}^n) > 0 \text{ i.e., } \mu(F \setminus \bigcap_n U_{m_n}^n) = \mu(\bigcup_n F \setminus U_{m_n}^n) < \sum \frac{1}{2^n} = 1 \text{ } \square, \mu(F \setminus U_{m_n}^n) < \frac{1}{2^n} \text{ } \square$$

$|\bigcap_n \bigcup_{m_n}^n| \leq |\{f \in F : f \leq g\}| \leq |F| = \kappa$ , וכן  $f \leq g$  נאמר,  $n$  וכן  $f(n) \leq g(n)$ ,  $f \in \bigcap_n \bigcup_{m_n}^n$  וכן

הערה: נניח  $X_1 < 2^{X_0}$ ,  $X_1 \leq K \leq 2^{X_0}$  ו'  $F$  מכיל לא-חסומה  $K$  (המרחק של  $F$  מ'  $K$ ).

מחנה אלהה המרכזי - מקדש : יישוב חקלאי

\* מבחן: אם יש מידה  $\bar{P}(A)$  לאישה  $2^X \leq K$ , אז יש מידה  $\bar{P}([0, 1])$ .  
הערה: עבור  $K$  היא  $\boxed{\text{בעלת}}$  אם לא ניתן להציג (בזוג)  $K$  באיחוס  $K > 1$  (בזוג)  $K > 1$ .

\* משפט גולדשטיין: אם יש איבר  $\alpha$  ב- $K$  כזה ש- $P(\alpha) = 0$ , אז  $\alpha$  איננו רגולרי. (הוכחה: במקרה זה, רגולריות  $\alpha$  מניחה  $0 < \alpha$  איננו רגולרי, ולכן איננו רגולרי. כלומר,  $\alpha$  איננו רגולרי. כלומר,  $\alpha$  איננו רגולרי.)

הוכחה: במקרה זה, נרדוף את  $\mu$  על ידי  $P(S)$ .  
 \* הצעד הראשון: יהא  $A \in \mathcal{S}$  ונראה כי  $\mu(A) = P(S)(A)$ .  
 \* הצעד השני: אם יש לנו מידע מסוים, נראה כי  $\mu(B) = P(S)(B)$  עבור כל  $B \subseteq A$ ,  $0 < \mu(A) < \infty$ .  
 \* הצעד השלישי: נראה כי  $\mu(B) = P(S)(B)$  עבור כל  $B \subseteq S$ ,  $0 < \mu(B) < \infty$ .

השערה: עבור  $\varepsilon$  מסוים,  $K^+$  היא הפונקציה הנאמדת ביותר לשערה  $\mu - \varepsilon$ .

העוצמה  $k^+$  נקראת עוצמה חיובית. עוצמה שלילית נקראת עוצמה שלילית.

צולמה א היא א-ישיבה בחול אם היא עבוי ורגוריי, ואינה  $X_0$ .

\* האם יש עונש א'-נליטי בהל? אם כן, אל מה היא עונש?

היה לר  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  כי כולם ענן בים. היה גם לר  $\lambda_{N_0}$  (כי הוא גבול)

לכן  $\chi'_{X_0} < \kappa$ , וזהו סוף הוכחה.

אפילו אם מניחים שהאקסיומות הישנות לא הולאמו, לא ניתן להוכיח להנחתה  
ההנחתה של עוצמה אי-נטיבית בחלל איננה גורמת סתירה.



\* משפט: אם יש מידה  $\mu$  על  $\mathcal{A}$ , אז  $\mu \leq \mu_0$  נשיג בחול. (!)  
 נוכיח מרחיבים את המשפט ואחר-כך נציג כיצד להכליל.

\* הצגה:  $\mu$  מרחיב  $\mu_0$  היא  $\mu \geq \mu_0$  היא אוסף  $\{A_{\alpha,n} : \alpha < \aleph_1, n \in \mathbb{N}\}$  של קבוצות על  $\aleph_1$   
 כך ש: (1) איברי  $\mathcal{A}$  של  $\mu$  מיוצגים  $\mu$  (2) האיחוד של  $\mu$  של  $\mu_0$  מכסה את  $\aleph_1$  (כלומר  $\mu_0$  הוא מידה)

$$\left( \aleph_1 \setminus \bigcup_n A_{\alpha,n} \right) \cap \mu_0 = \emptyset$$

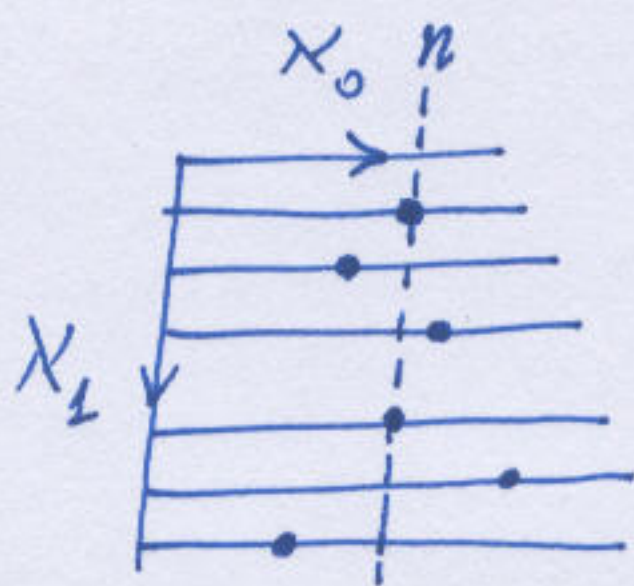
\* לענין:  $\mu$  מרחיב  $\mu_0$   $\aleph_1 \times \aleph_0$ .  
הוכחה: לכל  $\alpha < \aleph_1$ ,  $\mu_0(\alpha) < \aleph_1$ . יהא  $f: \mathbb{N} \rightarrow \aleph_1$  נציג

$$A_{\alpha,n} = \{ \xi < \aleph_1 : f_{\xi}(n) = \alpha \}$$

$$\mu(\alpha, \aleph_1) = \bigcup_n A_{\alpha,n} \quad \alpha < \aleph_1$$

\* מסקנה: אין מידה  $\mu$  על  $\mathcal{A}$ .

הוכחה: האיחוד של  $\mu$  שורה מדידה מלאה, לכן יש בה איבר מדידה  $< \aleph_1$ . נסמן את האיבר הזה.



יש  $\aleph_1$  איברים מסוגים!  $\aleph_0$  קבוצות, לכן יש קבוצה עם  $\aleph_1$  איברים מסוגים. כולם מדידה  $< \aleph_1$  וזרים,  $\aleph_1$ .

\* לענין:  $\mu$  מרחיב  $\mu_0$   $\aleph_1 \times \aleph_1$ , (כלומר  $\mu$ ), לכן אין מידה  $\mu$  על  $\mathcal{A}$ .  
הוכחה: כהה.

\* מסקנה: אם יש מידה  $\mu$  על  $\mathcal{A}$ , אז  $\mu \leq \mu_0$  נשיג בחול.

הוכחה: יהא  $\mu$  קבוצה המיוצגת  $\mu$  של מידה  $\mu$   $\mu$ .

אזי  $\mu$  מדידה היא  $\mu$ -אנליטי, לכן  $\mu$  רצונית. מאידך,  $\mu$  אינה מדידה  $\mu^+$  בעל  $\mu$  האינפניט. לכן,  $\mu$  אי-נשיג בחול.

\* הצגה:  $\mu$  מרחיב  $\mu_0$  אם יש מדידה  $\mu$ -אנליטי  $\mu$  על  $\mathcal{A}$ .  
הראו: אם  $\mu$  מדידה-ממלי, אז  $\mu$  אי-נשיג בחול.



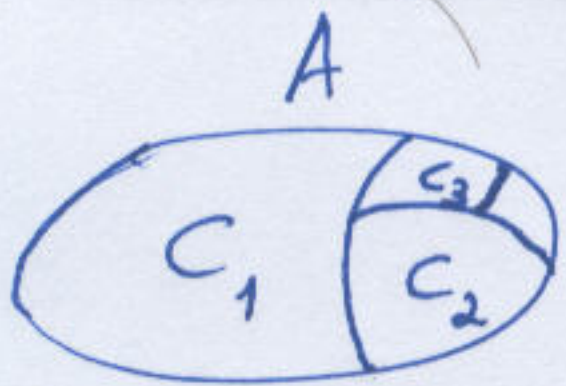
הצגה:  $\#$  יהא  $\mu$  מדידה על  $S$ .

(1)  $A \subseteq S$  היא קליטה על  $\mu$  אם:  $0 < \mu(A)$ , וכל  $B \subseteq A$ ,  $\mu(B) = \mu(A)$  או  $\mu(B) = 0$ .

(2)  $\mu$  חסר-אלמנטים אם אין לה אלמנטים.

למה: אם  $\mu$  מדידה על  $S$ ,  $0 < \mu(A)$ ,  $A \subseteq S$ ,  $S$  חסר-אלמנטים אז יש קבוצות  $C_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  $C_n \subseteq A$  כך ש:  

$$\mu(A) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^n C_k\right) \leq \mu(A)$$



הוכחה: ניתן להציג  $A = C_1 \cup D_1$  כך ש-  $\frac{1}{2}\mu(A) \leq \mu C_1$

$\frac{1}{2}\mu(D_1) \leq \mu C_2$  ---  $D_1 = C_2 \cup D_2$

$\frac{1}{2}\mu(D_2) \leq \mu C_3$  ---  $D_2 = C_3 \cup D_3$

⋮

כל שלב,  $C_n$  מכסה (מבחנת מדידה) לפחות  $\frac{1}{2}$  ממה שנשאר. זה ניתן הצגה.

מסקנה: אם  $\mu$  חסר-אלמנטים על  $S$ ,  $0 < \mu A$ , אז יש חלוקה  $A = B \cup C$   $\mu(B) = \mu(C) = \frac{1}{2}\mu(A)$ .  
הוכחה: בה"כ  $\mu(A) = 1$ . נגדיר באינדוקציה על  $\alpha < \aleph_1$  קב'  $S_\alpha \subseteq A$ .

הבניה: בלוב  $\alpha$ , ניתן  $C = \bigcap_{\beta < \alpha} S_\beta$ . אם  $\mu C = \frac{1}{2}$  סיימנו. אחרת,  $\frac{1}{2} < \mu C$ .

~~מהלכה~~  $S_\alpha \subseteq C$  וזו  $\mu(S_\alpha) < \mu(C)$   $\frac{1}{2} < \mu(S_\alpha)$ .

כיון שלכל  $\alpha$ , יש רציונלי בקטע  $(\mu(S_\alpha), \mu(S_{\alpha+1}))$  הבניה חייבת לעצור באיזשהו  $\alpha < \aleph_1$ , והקטע סגור.

$\frac{1}{2} = \mu(S_\alpha)$   $S_\alpha$  יתק"ם

כעת אנו מוכיחים לרובית מוצאה חיובית...



משפט: אם יש מיצג חסרת-אלומים על קבוצה כוללת, אז יש מיצג (חסרת-אלומים) על  $[0,1]$ .  
שליחת אל-מיצג לבני.  
 (ברור, במקרה זה יש מונה מיצג-ממילא א כך  $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$ ).

הוכחה: יהא  $\mu$  מיצג על חסרת-אלומים  $S$ .

נגדיר מיצג על  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  (מרחב נתאר) לשליחת אל-מיצג המכילה עליו.

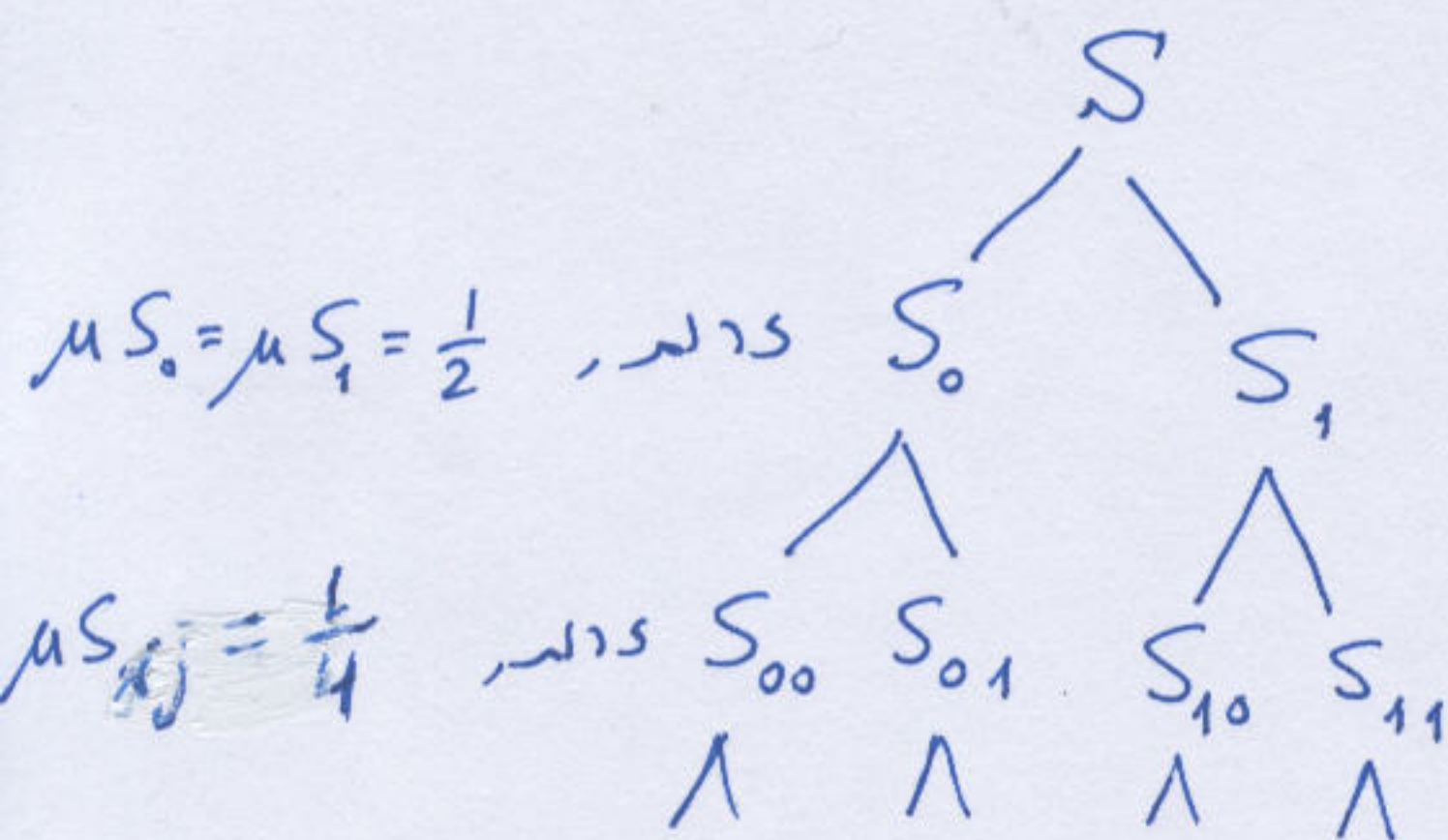
אזמה זה מספיק? אם נגדיר  $\psi: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0,1]$  ע"י

$$\psi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n}$$

אז  $\psi$  חתץ פרא-לוקב בה-מניה (שליחת 0) ומתקיים  $\mu A = \mu(\psi^{-1}[A])$  <sup>מכילה</sup>  
<sup>לפי</sup>

לכן, אם  $\tilde{\mu}$  מרחיבה את מיצג המכילה על  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  ושלמה, אז  $\mu^* = \psi(\tilde{\mu})$   
 $(\psi^{-1}[A])^* = \tilde{\mu}(\psi^{-1}[A]) = \mu(A)$  ושלמה.

נראה במסגרת להגדיר על בינארי:



לכן  $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  נגדיר  $S_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{f \upharpoonright n}$ , ונגדיר מיצג על  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ :

$$\mu(A) := \mu\left(\bigcup_{f \in A} S_f\right)$$

$\mu$  מרחיבה את מיצג המכילה, כי לכל סדרה סופית  $\sigma$  מאונן  $n$ ,  $\bigcup_{f \upharpoonright n = \sigma} S_f = S_\sigma$ .

לכן  $\mu(S_\sigma) = \frac{1}{2^n}$   $\{f: f \upharpoonright n = \sigma\} = \mu(S_\sigma)$ .  
 (ההתכנות על בסיס לאופרטיביות  $\leftarrow$  ההתכנות על קב' בורה  
 $\leftarrow$  ההתכנות על קב' מדינת לב  $\leftarrow$  בורה  $\Delta$  מיצג-0)  
 $\mu$  חסרת-אלומים מסיבה לנראה בהלן.



הערה: בהנחה, ניקחנו תיכונה של  $2^X$  (ב' מניחה 0).  
לכן, המידה אינה  $(2^X)^+$  - אדיטיבית.

משפחה: אם יש מידה חסומה אטומית על  $\mathcal{A}$ , אז  $\mu \leq 2^X$ .

מיצור עם אטומים

\* נניח שיש מידה  $\mu$  על  $\mathcal{A}$  עם אטומים  $A$ . אזי יש מידה צורכי-1 על  $\mathcal{A}$ :

$$B \subseteq A \text{ סבך } \nu(B) = \frac{1}{\mu(A)} \cdot \mu(B) \in \{0, 1\}$$

(הערה: מידה  $\mu$  על  $X$  היא צורכי-1 אם סבך  $B \subseteq X$ ,  $\mu(B) \in \{0, 1\}$ ).

\* בפרט, אם יש מידה עם אטומים על  $\mathcal{A}$ , אז יש מידה צורכי-1 על  $\mathcal{A}$ .  $\nu(C) := \nu(C \cap A)$  (הנ"ל)

הקשר בין מיצור צורכי-1 לזמן-מסוננים

\* הערה (1): על  $\mathcal{A}$  מסונן  $\mathcal{U}$  הוא צורכי-1 אם  $\mathcal{U} = \{A \subseteq X : \mu(A) = 1\}$  + לא ראוי.  
(כאן  $\mathcal{U}$  הוא  $\mathcal{A}$  ו- $\mu$  הוא  $\mu$ )  
(2) על מסונן  $\mathcal{U}$  הוא צורכי-1 אם  $\bigcap_n A_n \in \mathcal{U} \leftarrow (n \in \mathbb{N}) A_n \in \mathcal{U}$

$\Leftrightarrow$  אם  $\mathcal{U} = \{A \subseteq X : \mu(A) = 1\}$ , אז  $\bigcap_n A_n \in \mathcal{U}$  (חלילה).

\* משפחה: אם  $\mu$  מידה צורכי-1 על  $\mathcal{A}$ , אז

$$\mathcal{U} = \{X \subseteq X : \mu(X) = 1\}$$

מסונן צורכי-1 על  $\mathcal{A}$

\* הכיוון ההפוך: אם  $\mathcal{U}$  מסונן צורכי-1 על  $\mathcal{A}$ , אז

$$\mu(X) := \begin{cases} 1 & X \in \mathcal{U} \\ 0 & X \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

מידה צורכי-1 על  $\mathcal{A}$

\* הערה: מסונן  $\mathcal{U}$  על  $\mathcal{A}$  הוא צורכי-1 אם  $\bigcap_{\alpha < \kappa} A_\alpha \in \mathcal{U} \leftarrow (A_\alpha \in \mathcal{U})$

\* מלבד: אם  $\mathcal{A}$  הוא סבך של  $\mathcal{A}$  עם אטומים, אז מסונן הוא צורכי-1.

הוכחה: זהו לא המלבד המקורי עבור מידה, להניח בהכרח  $I$ .



מיונים מציינים

צורכי - יוצא, איבוא, להמונה הראשון של ציון מידה צורכי - יש ציון מידה/צומסן א-עלם/ה, וממילא על כל המונים הצדוים יתר של מידה צורכי - /צומסן ס-עלם.  
בעצרה: מונה  $\kappa < \aleph_0$  הוא  $[3'3']$  אם יש צומסן א-עלם על  $\kappa$ .

לסננה: אם  $\mathcal{U}$  צומסן א-עלם על  $\kappa$ : (גהא  $\mu$  המידה המתאימה)

- (1) לכל  $a \in \kappa$ ,  $\{a\} \notin \mathcal{U}$  (כי  $\mu\{a\} = 0$ )
- (2) לכל  $A \subseteq \kappa$  אם  $|A| < \kappa$ ,  $A \notin \mathcal{U}$  ( $\mu$  א-עלם על  $\mu$ )
- (3) קטגורי (אם  $\kappa = \bigcup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$ ,  $\kappa_\alpha < \kappa$ , אז  $\mu(\kappa) = 0$ )

\* העצרה: מונה  $\kappa$  הוא  $[א' - נשיל]$  (בתוך) אם:  $\aleph_0 < \kappa$ ,  $\kappa$  קטגורי, וכל  $\lambda < \kappa$ ,  $2^\lambda < \kappa$ .

הערה: (1)  $א' - נשיל \leftarrow$  ~~א' - נשיל~~ חלש, כי  $2^\lambda \leq \lambda^+$ .

(2)  $2^{\aleph_0}$  לא יכול להיות  $א' - נשיל$ , כי  $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = 2^\lambda$ .

(3) נגדיר באינדוקציה על  $\alpha$ :

$$\begin{cases} I_0 := \aleph_0 \\ I_{\alpha+1} = 2^{I_\alpha} \\ I_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} I_\beta \quad (\gamma \text{ גבול}) \end{cases}$$

אזי: אם  $\kappa$   $א' - נשיל$ , אז לכל  $\alpha < \kappa$ ,  $I_\alpha < \kappa$ .

\* משפט: אם  $\kappa$  ~~מציינים~~ מציינים, אז  $\kappa$   $א' - נשיל$ .

הוכחה: ראינו שהקטגורי. נראה לכל  $\lambda < \kappa$ ,  $2^\lambda < \kappa$ . נניח בשלילה  $\kappa \leq 2^\lambda$ .

אז יש משפחה  $\mathcal{S}$  מעוצמה  $\kappa$  של פונקציות  $f: \lambda \rightarrow \{0,1\}$ .

יהא  $\mathcal{U}$  צומסן א-עלם על  $\mathcal{S}$ . נניח "ממוצח" על כל הפונקציות  $f \in \mathcal{S}$  ביותם למידה  $\mu$  על  $\mathcal{U}$ .

לכל  $\alpha < \lambda$ , נבחר  $g(\alpha) \in \{0,1\}$  כך ש  $\chi_\alpha = \{f \in \mathcal{S} : f(\alpha) = g(\alpha)\}$  אז  $\mathcal{U} \ni \chi_\alpha$

$$\bigcap_{\alpha < \lambda} \chi_\alpha = \{g\}$$

סיכום (Ulam)

אם יש קבוצה  $\mathcal{S}$  כך שיש מידה על  $\mathcal{S}$ , אז:

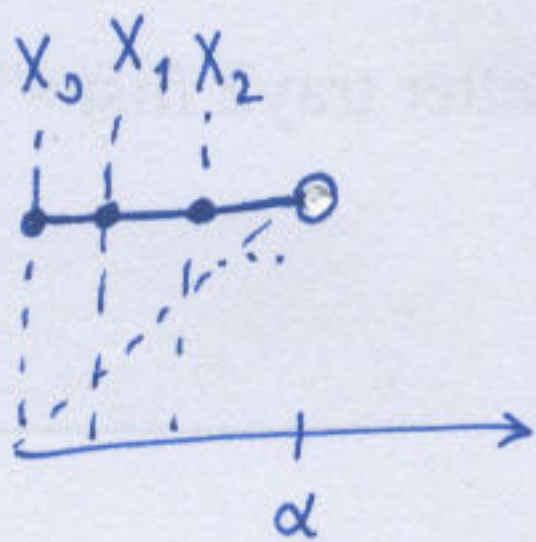
- (א) או שיש למידה הנכח אטום, וזאת  $|S| \leq$  מונה מציינים (בפרט  $א' - נשיל$ );
- (ב) או שהמידה חסרת אטומים, וזאת יש מידה (חסרת אטומים) על  $[0,1]$  המרחיבה את מידת לבגז, ובמקרה זה  $2^{\aleph_0} \leq$  מונה מציינים ממשי (בפרט  $א' - נשיל$  חלש).



= עוצר על מונים מציינים =

= מציג נורמלי =

\* אם  $u$  עוצמון (א-לם) על  $\kappa$ , אז  $u$  אינו  $\kappa^+$ -לם ( $\emptyset = \bigcap_{\alpha \in \kappa} u \setminus \alpha$ ).  
אבל אפשר להעריך לזה, במובן הבא:



\* השערה: (1) החיתוך האלכסוני של רב'  $X_\alpha \subseteq \kappa$ ,  $\alpha < \kappa$ , מוגדר להיות:

$$\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha := \{ \alpha < \kappa : \alpha \in \bigcap_{\beta < \alpha} X_\beta \}$$

(2) מסמן על  $\kappa$  הוא נורמלי אם הוא סגור לתמיכים אלכסוניים (א  $\kappa$  רגולרי).

\* השערה של Fodor: יהא  $u$  מסמן המכיל את  $\kappa$  הרב' הקר-חסומה ב- $\kappa$ . אזי:

$u$  נורמלי  $\Leftrightarrow$  לכל  $A \in u$  ולכל פונקציה  $f$  על  $A$  (כלומר  $f(\alpha) < \alpha$  לכל  $\alpha \in A$ )

יש  $B \in u$ ,  $B \subseteq A$ , כך ש  $f$  רבועה על  $B$ .

\* משפט: אם  $\kappa$  מצייני, אז יש עוצמון א-לם נורמלי על  $\kappa$ .

הקדמה לרובותה. נלמד ב"על מכילי" - כל מרכיזי בילמוד מונים מציינים. יהא  $u$  עוצמון סגור על  $\kappa$ .

היחס  $f =_u g$ , המוגד:  $f =_u g \Leftrightarrow \{ \alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha) \} \in u$ , הוא יחס שקילות.

הסדר  $\leq_u$  — " — :  $f \leq_u g \Leftrightarrow \{ \alpha < \kappa : f(\alpha) \leq g(\alpha) \} \in u$  הוא נור, ולכן סגור

על  $\kappa$ : אילו  $f_1 \leq_u f_2 \leq_u \dots$ , אז  $f_n(\alpha) < f_{n+1}(\alpha) < \dots$ ,  $\bigcap_n X_n \in u$ , נ"ח  $\alpha \in \bigcap_n X_n$ .

אז  $f_1(\alpha) < f_2(\alpha) < \dots$  ואלו סודרים,  $\frac{\kappa}{2}$

הוכחת המשפט: כו' הבה (למשל) אינה חסומה ע"י רבוע' (לכל  $\alpha < \kappa$ ,  $\{ \alpha : \alpha < id(\alpha) \} \in u$ ).

יהא  $f$  מינימלי בסדר  $\leq_u$  לאינה חסומה ע"י רבוע' (בסדר  $\leq_u$ ).

לכל  $g \in \kappa$ , אם  $g <_u f$ , אז  $g$  חסומה  $\leq_u$  ע"י אינלטהו  $\alpha < \kappa$  וכן יש  $\beta \leq g$  כך ש  $g \equiv \beta$  על רב'  $u$ . (בגלל א-לם).

עוצמון  
א-לם

$$V := f(u) := \{ X \subseteq \kappa : f^{-1}[X] \in u \}$$

יהא

$V$  נורמלי: נניח  $A \in V$ ,  $h$  פונקציה על  $A$ . נציג  $g(\alpha) = h(f(\alpha))$ .

לכל  $f(\alpha) \in A$ ,  $\alpha \in f^{-1}[A]$ , לפי  $g(\alpha) = h(f(\alpha)) < f(\alpha)$ , ז"א  $g <_u f$ , לפי  $g$  רבועה על  $B \in u$ .

ואז  $h$  רבועה על  $f[B] \in u$  (ובנה על  $A \cap f[B] \in V$ ).



