

השלמות ותרگیל מספר 4 בתורת הקבוצות

בועז צבאן

20 במרץ 2013

הערה: כל מעבר שלא מוסבר בתירגול להלן משתמש בידע מההרצאה. כדאי לעבור קודם על תקציר ההרצאה כדי להבין.

תרגילי הבית מסומנים במפורש כ**תרگیל בית** ואותם יש לפתור ולהגיש. שאלות 6,7 וכן שאלות 9,10 הן **שאלות בונוס** ואינן חובה.

תרגיל זה ארוך יותר מהרגיל, אך רוב השאלות פתרון קצר מאוד (לעתים, פחות משורה אחת). שימו לב שאפשר להשתמש בכל הסעיפים הקודמים.

מועד ההגשה הוא יום רביעי הראשון שאחרי פסח. במידה שתצטרכו ארכה להגשת התרגיל, נא הודיעו למתרגל או לי.

1 טיפוס הסדר וחיבור סודרים

תרגיל: אם α איזומורפי לרישא של β , אז $\alpha < \beta$.

פתרון: יהי $\gamma \in \beta$ כך ש $\alpha \cong \gamma$. כיון ש $\beta = \gamma$, $\alpha \cong \gamma$ ולכן $\alpha = \gamma$. $\square$

תרגיל: אם $0 < \beta$ אז $\alpha < \alpha + \beta$.

פתרון: מהגדרת חיבור, $\beta \times \{0\} \cup \{1\} \times \alpha \cong \alpha + \beta$.

כעת, $\beta \times \{0\} \cup \{1\} \times \alpha \cong \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \alpha \cong \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$ כלומר α איזומורפי לרישא של $\beta \times \{0\} \cup \{1\} \times \alpha$.

כיון ש $\beta \times \{0\} \cup \{1\} \times \alpha \cong \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$, רישא זו איזומורפית לרישא של $\alpha + \beta$ ולכן α איזומורפי לרישא של $\alpha + \beta$.

מהתרگیל הקודם, $\alpha < \alpha + \beta$. $\square$

הגדרה: פונקציה על סודרים היא:

1. **מונוטוניות** אם $f(\alpha_1) \leq f(\alpha_2)$ לכל זוג סודרים $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

2. **רציפה** אם $f(\beta) = \sup \{f(\gamma) : \gamma < \beta\}$ לכל סדר גבולי β .

תרגיל: הפרך את הטענה הבאה: אם $0 < \beta$ אז $\alpha < \beta + \alpha$.

פתרון: $0 < 1$ אך $0 + \omega = \omega = 1 + \omega$. $\square$

1. תרגיל בית: הפרך, על ידי דוגמאות נגדיות, כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\beta_1 < \beta_2$, אז $\beta_1 + \alpha < \beta_2 + \alpha$.

ב. אם β גבולי, אז $\beta + \alpha = \sup \{\gamma + \alpha : \gamma < \beta\}$.

ג. אם β גבולי, אז $\beta + \alpha$ גבולי.

ד. לכל β , הפונקציה $f(\alpha) := \alpha + \beta$ מונוטונית ורציפה.

תזכורת: לכל α , הפונקציה $f(\beta) := \alpha + \beta$ מונוטונית ורציפה.

2. תרגיל בית: הוכח את הטענות הבאות:

א. אם f מונוטונית ורציפה, β גבולי, ו $B \subseteq \beta$ מקיימת $\sup B = \beta$, אז $\sup \{f(\gamma) : \gamma \in B\} = f(\beta)$.

ב. אם β גבולי, ו $B \subseteq \beta$ מקיימת $\sup B = \beta$, אז $\sup \{\alpha + \gamma : \gamma \in B\} = \alpha + \beta$.

הגדרה (חיסור סודרים): יהיו $\alpha \leq \beta$. $\beta - \alpha := \text{type}(\beta \setminus \alpha)$.

3. תרגיל בית: הוכח את הטענות הבאות.

א. $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$.

ב. $0 = \beta - \alpha \iff \alpha = \beta$.

ג. $0 < \beta - \alpha \iff \alpha < \beta$.

תרגיל: יישם את התרגיל הקודם להוכחה אלגברית של הטענה הבאה: $\beta_1 < \beta_2$, אז $\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$.

פתרון: כיון ש $\beta_1 < \beta_2$, $0 < \beta_2 - \beta_1$ (מסעיף ג לעיל).

לכן, יחד עם אסוציאטיביות חיבור סודרים וסעיף א לעיל, $\alpha + \beta_1 < (\alpha + \beta_1) + (\beta_2 - \beta_1) = \alpha + (\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)) = \alpha + \beta_2$. $\square$

תזכורת: α גבולי $\iff$ לכל $\beta < \alpha$ מתקיים $\beta + 1 < \alpha$.

תרגיל: אם β גבולי, אז $\alpha + \beta$ גבולי.

פתרון: יש להראות שאין סודר $\gamma < \alpha + \beta$ כך ש $\gamma + 1 = \alpha + \beta$. יהי איפוא $\gamma < \alpha + \beta$.

כיון ש β גבולי, אנו יודעים ש $\gamma < \alpha + \beta = \sup \{\alpha + \delta : \delta < \beta\}$.

מהגדרת סופרמום, יש $\delta < \beta$ כך ש $\gamma < \alpha + \delta$ ולכן $\gamma + 1 \leq \alpha + \delta$.

כיון ש β גבולי, $\delta + 1 < \beta$ ולכן $\delta + 1 \leq \sup \{\alpha + \delta : \delta < \beta\} = \alpha + \beta$ ולכן $\gamma + 1 \leq \alpha + \delta < \alpha + \delta + 1 = \alpha + (\delta + 1) \leq \alpha + \beta$. $\square$

2 כפל סודרים

תרגיל: $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$.

פתרון: $\alpha \cdot 2 \cong 2 \times \alpha = \{0, 1\} \times \alpha = \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \alpha \cong \alpha + \alpha$.

לכן, $\alpha \cdot 2 \cong \alpha + \alpha$, ואנו יודעים שכל שני סודרים איזומורפיים הם שווים. $\square$

תרגיל: לכל n טבעי, $n \cdot \omega = \omega$.

פתרון: $n \cdot \omega \cong \omega \times n = \{(0, 0), \dots, (0, n-1), (1, 0), \dots, (1, n-1), (2, 0), \dots, (2, n-1), \dots\}$ כמו ω :

הפונקציה $(i, j) \mapsto ni + j$ היא איזומורפיזם סדר מהקבוצה ω .

לכן, $n \cdot \omega$ איזומורפי ל ω ולכן הם שווים. $\square$

תזכורת: עבור סודר גבולי β , $\alpha \cdot \beta = \sup \{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$.

לכן, לכל α , הפונקציה $f(\beta) = \alpha \cdot \beta$ מונוטונית ורציפה.

לכן $\sup B = \beta$ ש $B \subseteq \beta$ לכל $\sup \{\alpha \cdot \gamma : \gamma \in B\} = \alpha \cdot \beta$.

תרגיל: הפרך את הטענה הבאה: לכל $0 < \beta$, הפונקציה $f(\alpha) = \alpha \cdot \beta$ מונוטונית ורציפה.

פתרון: נראה שהפונקציה אינה רציפה. אכן, $0 < \omega$ סודר גבולי, אך $\omega < \omega \cdot \omega = \sup \{n \cdot \omega : n < \omega\} = \sup \{\omega : n < \omega\}$.

4. תרגיל בית: הפרך, על ידי דוגמא נגדית, כל אחת מהטענות הבאות.

א. $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

ב. עבור β גבולי, $\beta \cdot \alpha = \sup \{\gamma \cdot \alpha : \gamma < \beta\}$.

ג. אם $0 < \alpha$ ו $\gamma < \beta$ אז $\gamma \cdot \alpha < \beta \cdot \alpha$.

ד. לכל $0 < \beta$, $\sup \{\gamma \cdot \alpha : \gamma \in B\} = \beta \cdot \alpha$ לכל $B \subseteq \beta$ כך ש $\sup B = \beta$.

5. תרגיל בית: הוכח שלכל β גבולי ו $0 < \alpha$, וגם $\beta \cdot \alpha$ שניהם סודרים גבוליים.

6. תרגיל בית (בונוס): לכל α, β עם $0 < \beta$ יש γ, δ יחידים כך ש $\alpha = \beta \gamma + \delta$ ו $\delta < \beta$.

הערה: קיבלנו שאפשר לחלק סודרים עם שארית. אפשר לסמן $\gamma = \alpha / \beta$ ו $\delta = \alpha \bmod \beta$.

7. תרגיל בית (בונוס): בהתאם לסימונים לעיל, חשב את $5 \bmod \omega$ ואת $\omega + \omega \bmod \omega$.

3 חזקות סודרים

8. תרגיל בית: הוכח, באינדוקציה על β , שאם $\gamma < \beta$ ו $1 < \alpha$ אז $\alpha^\gamma < \alpha^\beta$.

נזכור שלכל מספר טבעי N יש הצגה יחידה בבסיס 10, כלומר הצגה מהצורה

$$N = 10^{m_1} k_1 + 10^{m_2} k_2 + \dots + 10^{m_n} k_n$$

כאשר $n \geq 1, m_1 > m_2 > \dots > m_n$ ו $0 < k_1, \dots, k_n < 10$.

9. תרגיל בית (בונוס): הוכח את האנלוג הבא עבור "הצגה בבסיס ω ": לכל סודר $0 < \alpha$, יש הצגה יחידה בצורה

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

כך ש $n \geq 1, \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ ו $\alpha \geq \beta_1$ ו $0 < k_1, \dots, k_n < \omega$. צורה זו של α נקראת הצורה הנורמלית של קנטור עבור α .

נגדיר ברקורסיה על הטבעיים: $\alpha_0 = \omega$, ולכל n טבעי, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ (חזקות סודרים).

יהי $\epsilon_0 = \sup \{ \alpha_n : n < \omega \}$.

10. תרגיל בית (בונוס):

א. הוכח ש ϵ_0 הוא הסודר הראשון α המקיים $\omega^\alpha = \alpha$.

ב. מהי הצורה הנורמלית של קנטור עבור ϵ_0 ?