שאלה 1

יהי κ מונה אינסופי, ותהי A קבוצה סדורה היטב כך שמתקיים: לכל $a \in A$, $|\text{seg}(a)| < \kappa$.

הוכח כי $|A| \leq \kappa$. (36 נקודות)

תשובה:

A, κ סדורות היטב, ולכן אחת מהן רישא של השניה. נבחן את האפשרויות השונות:

א. $A \cong \kappa$. אז $|A| = |\kappa| = \kappa$ וסיימנו.

ב. κ איזומורפי לרישא של ממש של A: אז יש $a \in A$ כך ש $\text{seg}(a) \cong \kappa$, ולכן $\kappa = |\kappa| = |\text{seg}(a)| \underset{\text{נתון}}{<} \kappa$, סתירה. לכן אפשרות זו לא תיתכן.

ג. A איזומורפי לרישא של ממש של κ: יש $\alpha \in \kappa$ כך ש $A \cong \text{seg}_\kappa(\alpha) = \alpha$.

אז $|A| = |\alpha| \leq \alpha < \kappa$, וסיימנו. //

שאלה 2

הוכח כי לא קיימת "קבוצת כל המונים", כלומר: משפחת כל המונים אינה קבוצה. (36 נקודות)

תשובה:

נניח בשלילה, שהמשפחה $\mathcal{F}$ של כל המונים היא קבוצה.

הוכחנו בקורס שלכל סודר α יש מונה $\kappa > \alpha$. במלים אחרות, כל סודר שייך לאיזשהו מונה.

לכן, האיחוד $A := \bigcup\mathcal{F}$ של כל המונים הוא קבוצה (מאקסיומת האיחוד) שכל הסודרים שייכים לה.

מצד שני, כל איבר של A הוא איבר של אחד המונים ב $\mathcal{F}$ ולכן סודר.

לכן, A היא "קבוצת כל הסודרים", בסתירה למשפט בורלי-פורטי, שאומר שמשפחת כל הסודרים אינה קבוצה. //

פתרון אלטרנטיבי: אם $\mathcal{F}$ קבוצה, אז מאקסיומת האיחוד, $A := \bigcup\mathcal{F}$ קבוצה.

יהי $\kappa := |A|$.

אז $\kappa^+ \in \mathcal{F}$ ולכן $\kappa^+ \subseteq \bigcup\mathcal{F}$

$$\kappa = |A| = \left|\bigcup\mathcal{F}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \kappa^+ \subseteq \bigcup\mathcal{F}}}{\geq} |\kappa^+| = \kappa^+ .$$

קיבלנו ש $\kappa^+ \leq \kappa$. ↯ //

שאלה 3

הגדרות: מסילה פשוטה במישור $\mathbb{R}^2$ היא תמונה של פונקציה חד־חד ערכית ורציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$.

צביעה של הנקודות במישור $\mathbb{R}^2$ בצבעים ירוק ואדום היא התאמה של צבע אחד (ירוק או אדום) לכל נקודה במישור.

א. תהי $\mathcal{F}$ קבוצת כל המסילות הפשוטות במישור. הוכח ש $|\mathcal{F}|=\mathfrak{c}$. (16 נקודות)

ב. הוכח: יש צביעה של הנקודות במישור בצבעים ירוק ואדום כך שבכל מסילה פשוטה במישור, יש גם נקודות שנצבעו ירוק וגם נקודות שנצבעו אדום. (20 נקודות)

תשובה:

א. תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ ~~מסילה פשוטה במישור~~ פונקציה חד-חד ערכית ורציפה. כיון ש f רציפה, היא נקבעת באופן יחיד ע"י ערכיה ב $[0,1]\cap\mathbb{Q}$.

לכן, מספר המסילות הפשוטות במישור $\le$ מס' הפונקציות $f:[0,1]\cap\mathbb{Q}\to\mathbb{R}^2$ $=$

$$= \left|(\mathbb{R}^2)^{[0,1]\cap\mathbb{Q}}\right| = (c^2)^{\aleph_0} \underset{c^2=c}{=} c^{\aleph_0} \underset{c=2^{\aleph_0}}{=} (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} \underset{\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0}{=} 2^{\aleph_0} = c. \quad //$$

ב. לפי (א), יש מיספור $\mathcal{F}=\{\mathrm{im} f_\alpha : \alpha<c\}$ של כל המסילות הפשוטות במישור.

נגדיר באינדוקציה על $\alpha\ (<c)$, צביעה של חלק מהנקודות במישור.

$\alpha=0$: נבחר שתי נקודות שונות $g_0, r_0\in \mathrm{im} f_\alpha$ ונצבע את g_0 בירוק ואת r_0 באדום.

$\alpha>0$: f_α חד-חד ערכית ותחומה $[0,1]$ עוצמתו C, לכן $|\mathrm{im}(f_\alpha)|=c$.

$$|\{g_\beta, r_\beta : \beta<\alpha\}| \le |\alpha| \le \alpha < c$$

לכן $$|\mathrm{im}(f_\alpha)\setminus\{g_\beta, r_\beta:\beta<\alpha\}| = c$$

ובפרט, יש $\underline{g_\alpha, r_\alpha}\in \mathrm{im}(f_\alpha)\setminus\{g_\beta, r_\beta:\beta<\alpha\}$ שונות. נצבע את g_α בירוק ואת r_α באדום.

סוף הבניה.

את כל הנקודות ב $\mathbb{R}^2$ שלא נצבעו במהלך הבניה הנ"ל (אם יש כאלה), נצבע באופן שרירותי.

תהי נתונה מסילה פשוטה במישור. יהי $\alpha<c$ כך שהמסילה היא $\mathrm{im}(f_\alpha)$. אז הנקודות g_α, r_α נמצאות עליה, וצבועות בצבעים שונים. //