

## בחינה בקורס תורת הקבוצות (88-202-01) - מועד ב'

אוניברסיטת בר-אילן, יום ה', ד' אדר ב' תשע"א (10.3.11 למ')

**מרצה:** בועז צבאן.

**מתרגלים:** גילי גולן, אור לנדסמן.

**משך הבחינה:** שעתיים.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

### הנחיות

**א.** השתדל לענות על כל השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטייטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

**ב.** המבחן הוא בשיטת "צבור כפי יכלתך":

הניקוד על כל שאלה הוא עד 36 נקודות.

עד 12 נקודות בונים יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות התשובות.

ניקוד	שאלה
	1
	2
	3
	סדר ונקיון
	סה"כ

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

**הבהרה:** גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

**בהצלחה!**

## שאלה 1

- א. הגדר: חתך דדקינד שמאלי ב  $\mathbb{Q}$ . (10 נקודות)
- ב. נסח את עקרון החסם העליון ב  $\mathbb{R}$ . (10 נקודות)
- ג. הוכח את עקרון החסם העליון ב  $\mathbb{R}$ . (16 נקודות)

תשובה:

## שאלה 2

א. הוכח כי לכל מונה אינסופי  $\kappa$ , יש פירוק של  $\kappa$  ל  $\kappa$  קבוצות זרות, שכל אחת מהן מעצמה  $\kappa$ , כלומר:

$$A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset, \alpha < \beta < \kappa \text{ ולכל } \alpha < \kappa, |A_\alpha| = \kappa, \kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha \quad (18 \text{ נקודות})$$

ב. חשב, בהנחת השערת הרצף המוכללת, את חזקות המונים הבאות:

•  $(\aleph_\omega)^{\aleph_{\omega+2}}$  (6 נקודות)

•  $(\aleph_\omega)^{5761}$  (6 נקודות)

•  $\aleph_1^{\aleph_0}$  (6 נקודות)

תשובה:

### שאלה 3

א. הסבר מה לא נכון בטיעון הבא:

לכל  $a, b \in \mathbb{R}$  כך ש  $a < b$ , יש  $q_{a,b} \in \mathbb{Q}$  כך ש  $a < q_{a,b} < b$ . לכן,

$$|\mathbb{R}| \leq |\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}| \leq |\{q_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

כלומר, הישר הממשי הוא בן מניה. (15 נקודות)

ב. הגדר: קבוצה דיסקרטית ב  $\mathbb{R}$ . (6 נקודות)

ג. הוכח כי כל קבוצה דיסקרטית ב  $\mathbb{R}$  היא בת מניה. (15 נקודות)

**תשובה:**