בחינה בקורס **תורת הקבוצות** (88־202־01) - מועד א׳

אוניברסיטת בר־אילן, יום ב׳, כ״ו שבט תשע״א (31.1.11 למ׳)

מרצה: בועז צבאן.

מתרגלים: גילי גולן, אור לנדסמן.

משך הבחינה: שעתיים.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. השתדל לענות על כל השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. המבחן הוא בשיטת ״צבור כפי יכלתך״:

הניקוד על כל שאלה הוא עד 36 נקודות.

עד 12 נקודות בונוס יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות התשובות.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
סדר ונקיון	
סה״כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה: גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

יהיו A, B קבוצות סדורות היטב.

א. הגדר את הסדר המילוני על $A \times B$, והוכח כי בכל קבוצה לא ריקה $C \subseteq A \times B$, יש איבר ראשון. (18 נקודות)

ב. נגדיר סדר מילוני על ${}^{\omega}\{0,1\}$: עבור $f, g \in {}^{\omega}\{0,1\}$ שונות, נאמר ש $f < g$ אם

ה n הראשון כך ש $f(n) \neq g(n)$ מקיים $f(n) < g(n)$.

האם זה סדר טוב? (18 נקודות)

תשובה:

שאלה 2

באינדוקציה על α, כל עוד הדבר אפשרי, נגדיר מספרים ממשיים x_α בצורה הבאה:

נבחר $x_0 \in (0,1)$ כלשהו. עבור סודר עוקב $\alpha+1$, אם $x_\alpha \neq 1$ נבחר $x_{\alpha+1} \in (x_\alpha, 1)$ כלשהו (ואם $x_\alpha = 1$ לא נעשה דבר, כלומר הבניה מסתיימת).

עבור α גבולי, נגדיר $x_\alpha = \sup\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ (סופרמום של קבוצה חסומה של מספרים ממשיים).

חייב להיות סודר גבולי בן מניה α כך שהבניה מסתיימת, כלומר $x_\alpha = 1$.

א. נסח טיעון זה בצורה מדוייקת, בעזרת משפט הרקורסיה. (16 נקודות)

ב. הוכח את הטענה שבסוף הטיעון. (10 נקודות)

ג. הראה שייתכן ש $\omega < \alpha$. (10 נקודות)

תשובה:

שאלה 3

בשאלה זו, "מעגל" פירושו מעגל בעל רדיוס חיובי.

יהי $\alpha < \mathfrak{c}$, ותהי $\{C_\beta : \beta < \alpha\}$ קבוצת מעגלים זרים במרחב $\mathbb{R}^3$. תהי $p \in \mathbb{R}^3$ נקודה שאינה נמצאת על אף אחד מהמעגלים הנתונים C_β ($\beta < \alpha$).

א. הוכח שיש מישור $P \subseteq \mathbb{R}^3$, כך ש $p \in P$, ולכל $\beta < \alpha$ מתקיים $C_\beta \not\subseteq P$ (המעגל אינו מוכל במישור). (8 נקודות)

ב. הוכח שיש מעגל $C_\alpha \subseteq P$ (P הוא המישור מסעיף א'), כך ש $p \in C_\alpha$, ולכל $\beta < \alpha$ מתקיים $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$. (10 נקודות)

ג. הסבר בקצרה, כיצד ניתן להשתמש בסעיף ב' כדי להראות שניתן להציג את המרחב כאיחוד של מעגלים זרים. (18 נקודות)

תשובה: