מספר סידורי: 2035
מספר מחברת:

שאלון סגור

מבחן בתורת הקבוצות

מועד ב', סמסטר א' ה'תש"ע; יום ה', ג' ניסן ה'תש"ע (18.4.2010 למ')

מספר קורס: 89-202-01. **מרצה:** ד"ר בועז צבאן. **מתרגלים:** עדי ירדן, שני תורג'מן.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.
משך הבחינה: שעתיים (הזמן כולל הארכה. לא תינתן הארכה נוספת.)
הנחיות:

1. ציין את מספר מחברת הבחינה שלך בראש עמוד זה.
2. אם שאלה מסויימת אינה ברורה, או שנראה לך כי יש בה טעות, נא כתוב לפני התשובה כיצד הבנת את השאלה והבודק יתחשב אם יש מקום לכך.
3. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).

חלק א: שאלות פתוחות

ענה על שאלה אחת בלבד מבין שתי השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'. כל תשובה יש להתחיל בדף חדש.

שאלה 1. שלאה זו עוסקת במשפט קנטור־בנדיקסון ובמונחים המופיעים בו.

(א) הגדר "קבוצה פרפקטית".

(ב) נסח במדוייק את משפט קנטור בנדיקסון.

(ג) הוכח את משפט קנטור בנדיקסון.

שאלה 2. תהי $\mathcal{F}$ מחלקה לא ריקה של סודרים. הוכח שלוש מבין הטענות הבאות. (בהוכחת טענה, מותר להשתמש בטענות שלפניה גם אם לא הוכחת אותן.)

(א) הוכח שיש ב $\mathcal{F}$ איבר ראשון.

(ב) נסמן $\bigcap\mathcal{F} = \{x : (\forall A \in \mathcal{F})\ x \in A\}$. הוכח ש $\bigcap\mathcal{F}$ קבוצה.

(ג) הוכח ש $\bigcap\mathcal{F}$ סודר. (מותר להשתמש בכך שקבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.)

(ד) הוכח ש $\bigcap\mathcal{F}$ הוא הסודר הראשון ב $\mathcal{F}$.

חלק ב: שאלות רב־ברירה

הנחיות: חלק זה הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). יש לענות על גבי הטופס. הקף בעיגול ברור, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. חובה לענות על כל השאלות. לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד. שים לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

שאלה 1. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) יש סודרים α, β, γ כך ש $\gamma \neq \beta$ ו $\alpha + \gamma = \alpha + \beta$.

($\clubsuit$) כל סודר הוא מונה או מספר טבעי.

אזי:

א. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

ב. שתי הטענות נכונות.

ג. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ד. שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 2. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) אם $|\alpha| = |\beta|$, אז $\alpha = \beta$.

($\clubsuit$) אוסף כל הסודרים הגבוליים הוא קבוצה.

אזי:

א. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ב. שתי הטענות אינן נכונות.

ג. שתי הטענות נכונות.

ד. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

שאלה 3. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) כל חתך דדקינד הוא תת־קבוצה חסומה מלעיל של $\mathbb{Q}$.

($\clubsuit$) לכל קבוצה חסומה $\mathcal{F}$ של מספרים ממשיים (חתכי דדקינד), החסם העליון של $\mathcal{F}$ הוא $\bigcup \mathcal{F}$.

אזי:

א. שתי הטענות אינן נכונות.

ב. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ג. שתי הטענות נכונות.

ד. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

שאלה 4. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) אפשר להוכיח ב ZFC ש $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

($\clubsuit$) אפשר להוכיח ב ZFC ש $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

אזי:

א. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ב. שתי הטענות נכונות.

ג. שתי הטענות אינן נכונות.

ד. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

שאלה 5. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) לכל סודר α, אם $\prec$ סדר טוב על α ו $\beta, \gamma \in \alpha$ מקיימים $\beta \prec \gamma$, אז $\beta \in \gamma$.

($\clubsuit$) לכל חבורה אינסופית G, קיימת פונקציה חד־חד ערכית $f : \omega \to G$ כך ש $\{f(g) : g \in G\}$ תת־חבורה של G.

אזי:

א. שתי הטענות נכונות.

ב. שתי הטענות אינן נכונות.

ג. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ד. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

בהצלחה!