שאלון סגור

מספר סידורי: 2040
מספר מחברת:

מבחן בתורת הקבוצות

מועד א', סמסטר א' ה'תש"ע; יום ד', ג' אדר ה'תש"ע (17.2.2010 למ')

מספר קורס: 88-202-01. **מרצה:** ד"ר בועז צבאן. **מתרגלים:** עדי ירדן, שני תורג'מן.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.
משך הבחינה: שעתיים (הזמן כולל הארכה. לא תינתן הארכה נוספת.)
הנחיות:

1. ציין את מספר מחברת הבחינה שלך בראש עמוד זה.
2. אם שאלה מסויימת אינה ברורה, או שנראה לך כי יש בה טעות, נא כתוב לפני התשובה כיצד הבנת את השאלה והבודק יתחשב אם יש מקום לכך.
3. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).

חלק א: שאלות פתוחות

ענה על שאלה אחת בלבד מבין שתי השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'. כל תשובה יש להתחיל בדף חדש.

שאלה 1. ספק הוכחות קצרות לשלוש מבין הטענות הבאות. להוכחת טענה, מותר להשתמש בטענות שלפניה גם אם לא הוכחת אותן.

(א) יהיו A קבוצה של סודרים ו α סודר, ותהי $f:\alpha\to A$ פונקציה עולה (כלומר: לכל $\beta,\gamma\in\alpha$ כך ש $\beta<\gamma$, מתקיים $f(\beta)<f(\gamma)$). הוכח שלכל $\beta\in\alpha$ מתקיים $f(\beta)\geq\beta$.
[רמז: נניח שלא, ויהי $\beta\in\alpha$ הראשון כך ש $f(\beta)<\beta$. מה אפשר לומר על $f(f(\beta))$?]

(ב) יהיו δ סודר, $A\subseteq\delta$, ו α טיפוס הסדר של A. הוכח ש $\alpha\leq\delta$.
[רמז: אחרת, $\delta<\alpha$. יהי $f:\alpha\to A$ איזומורפיזם הסדר. התבונן ב $f(\delta)$.]

(ג) הוכח שאם $A\preceq B$, אז $|A|\leq|B|$.

(ד) נסח והוכח את משפט קנטור־ברנשטיין.

(ה) הוכח שלכל שתי קבוצות A,B מתקיים $A\preceq B$ או $B\preceq A$.

שאלה 2. שאלה זו עוסקת בלמה של צורן ובמונחים המופיעים בה.

(א) הגדר את תנאי השרשרת הנדרש בלמה של צורן.

(ב) נסח במדוייק את הלמה של צורן.

(ג) הוכח את הלמה של צורן.

חלק ב: שאלות רב־ברירה

הנחיות: חלק זה הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). יש לענות על גבי הטופס. הקף בעיגול ברור, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. חובה לענות על כל השאלות. לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד. שים לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

שאלה 1. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) כל מונה הוא סודר גבולי או 0.

($\clubsuit$) כל סודר גבולי הוא מונה.

אזי:

א. שתי הטענות נכונות.

ב. שתי הטענות אינן נכונות.

ג. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ד. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

שאלה 2. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) לכל סדר חלקי $(A, <_A)$, יש סודר α ופונקציה $f : A \to \alpha$ כך שלכל $a, b \in A$ כך ש $a <_A b$, מתקיים $f(a) \in f(b)$.

($\clubsuit$) אם $A \subseteq B$ קבוצות של סודרים, כך ש $0 \in A$ ולכל $\alpha \in A$ גם $\alpha + 1 \in A$, אז $A = B$.

אזי:

א. שתי הטענות אינן נכונות.

ב. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

ג. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ד. שתי הטענות נכונות.

שאלה 3. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) בחזקות של סודרים, מתקיים $\omega < 2^\omega$.

($\clubsuit$) לכל α, $\alpha + \omega$ הוא סודר גבולי.

אזי:

א. שתי הטענות נכונות.

ב. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ג. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

ד. שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 4. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) הקבוצה $\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z},\ (n \leq 0 < m) \vee (n^2 < 2m^2)\}$ היא חתך דדקינד.

($\clubsuit$) כל תת־קבוצה חסומה מלעיל של $\mathbb{Q}$ היא חתך דדקינד.

אזי:

א. שתי הטענות נכונות.

ב. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ג. שתי הטענות אינן נכונות.

ד. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

שאלה 5. נתונות שתי טענות:

($\diamondsuit$) תהי $\langle a_n : n < \omega \rangle$ סידרת גודשטיין, ותהי $\langle b_n : n < \omega \rangle$ הסידרה המקבילה של סודרים. אם $a_0 = 10$, אז $a_1 = 83$, $b_0 = \omega^{\omega+1} + \omega$ ו $b_1 = b_2 = \omega^{\omega+1} + 2$.

($\clubsuit$) נגדיר קבוצה A_α לכל סודר α, ברקורסיה טרנספיניטית: $A_0 := \emptyset$. עבור $\alpha = \beta + 1$ נגדיר $A_\alpha := P(A_\beta)$, ועבור α גבולי נגדיר $A_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$. אזי לכל α מתקיים $|A_\alpha| \leq \aleph_\alpha$.

אזי:

א. שתי הטענות נכונות.

ב. רק הטענה הראשונה ($\diamondsuit$) נכונה.

ג. רק הטענה השניה ($\clubsuit$) נכונה.

ד. שתי הטענות אינן נכונות.

בהצלחה!