

צבעים ומספרים: שאלות לתיזה 6

בועז צבאן, בר־אילן, ה'תשע"א

16 במאי 2011

הגירסה הסופית של משפט שור אומרת שלכל k יש n כך שלכל צביעה של $1, \dots, n$ ב k צבעים, יש שלשת שור מונוכרומטית, כלומר x, y, z באותו צבע, כך ש $x + y = z$. (איננו דורשים ש $x \neq y$). נסמן ב $s(k)$ את ה n הקטן ביותר עם התכונה הנ"ל (כלומר שמספיק בשביל משפט שור עם k צבעים).

הוכח, או הפרך על ידי צביעה נגדית, הוא הפרך את הטענה הבאה.

טענה: $s(5) = 161$.

כדי להפריך, אפשר לנסות לכתוב תכנית מחשב שתמצא צביעה בחמישה צבעים של המספרים $1, \dots, 161$ שאין בה שלשת שור מונוכרומטית.

חישוב מספר שלשות שור המונוכרומטיות בצביעה נתונה של $1, \dots, n$ צורך כ n^2 פעולות, שזה מעט מאד עבור n קטן (כמו 160). לכן, אפשר להתחיל מצביעה שרירותית, או מצביעה שיש בה "מעט" שלשות שור מונוכרומטית, ובכל צעד לשנות צבע של איבר אחד (או מעט איברים) במטרה להקטין את מספר השלשות המונוכרומטיות.

אפשר בתחילה להריץ את התכנית שלכם על מספרים קטנים, ולראות מה המספר הגדול ביותר (מן הסתם יהיה קטן מ 160) שהצלחתם לצבוע בלי שלשות שור. בכל מקרה, נא לדווח לי את השיא שלכם.

מי שלומד מתמטיקה שימושית ורשאי לעשות פרוייקט, שאלה זו יכולה לשמש לכך (נא לדבר אתי, במקרה כזה).

הפניות רלוונטיות:

http://www.combinatorics.org/Volume_1/Abstracts/v1i1r8.html

http://www.combinatorics.org/Volume_7/Abstracts/v7i1r32.html

(יש עוד מאמרים בנושא).

הערות:

1. בחלק מהמאמרים, קוראים $s(k)$ ל n הגדול ביותר כך שיש צביעה של $1, \dots, n$ ב k צבעים בלי שלשת שור. בניסוח זה, הטענה תהיה $s(5) = 160$.

2. אם הטענה נכונה, התכנית שלכם לא תצליח למצוא צביעה כדרוש. אבל, אם התוכנית מוצלחת במיוחד, תוכלו להתשמש בה לקבל חסמים על $s(6), s(7), \dots$ שאולי ישפרו את החסמים הידועים. זו תחרות שבירית שיאים ממש מגניבה.