

צבעים ומספרים: שאלות לתיזה 5

בועז צבאן, בר־אילן, ה'תשע"א

16 במאי 2011

הוכח, מבלי להשתמש במשפט הקבוצה המינימלית, את המשפט הבא.

משפט. לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש a, d כך ש $a, a + d, 2d$ שלשתם מאותו צבע.

נשים לב שזה "כמעט כמו" משפט הצביעה של שור.

שקול להראות שיש פתרון מונוכרומטי למשוואה $2x - 2y + z = 0$.

הערות:

1. בגירסה קודמת של האתגר, כתבתי "בלי להשתמש במשפט היילס-ג'ואט", אולם לאחר מכן ראיתי שגם עם המשפט הזה זה לא טריויאלי. אמנם יש לי כיוון שעשוי לעבוד, אך לא בדקתי ולכן גם שאלה זו הופכת להיות חלק מהאתגר (להסיק את הטענה מהיילס-ג'ואט).

2. בכתה הוכחנו את הטענה בעזרת משפט הקבוצה המינימלית. יש גם הוכחה אלמנטרית, ראו בספרי הקורס (פרוטסוב, או גרהם ושות'). אז איני מתכוון להוכחה זו, שהיא "מתוחבלת", אלא להוכחה "טבעית" בעזרת המשפטים שכבר ידועים לנו.

3. למקרה של שני צבעים גילי מצאה הוכחה אלמנטרית פשוטה: תהי נתונה צביעה באדום וירוק, ונניח בשלילה שאין $a, a + d, 2d$ מאותו צבע.

ניקח a , למשל צבעו אדום. אילו $2a$ גם כן אדום, ניקח $d = a$ וסיימנו. לכן $2a$ ירוק.

מאותה סיבה, $4a$ אדום.

כיון ש $a, a + 2a, 2(2a)$ אינו מונ', $3a$ ירוק ולכן $6a$ אדום.

אז $a, a + 3a, 2(3a)$ שלשתם אדומים. סתירה.

אני מעריך שהכללה של הרעיון למספר צבעים גבוה יותר תהיה דומה להוכחה האלמנטרית (פרוטסוב, או גרהם ושות'), והייתי כאמור מעדיף לראות הוכחה טבעית יותר, בעזרת המשפטים שהיו לנו עד כה.