

צבעים ומספרים: שאלות לתיזה 4

בועז צבאן, בר־אילן, ה'תשע"א

12 באפריל 2011

משפט הינדמן הסימולטני אומר שלכל צביעה של הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש $k_1, k_2, \dots$ שונים, ויש $n_1, n_2, \dots$ שונים, כך שהקבוצה $FS(k_1, k_2, \dots) \cup FP(n_1, n_2, \dots)$ היא מונוכרומטית. אבל המשפט לא אומר שהסדרות שוות.

הינדמן מצא צביעה קונקרטית של הטבעיים במספר סופי של צבעים (למעשה, 7 צבעים) כך שאין $k_1, k_2, \dots$ שונים שעבורם הקבוצה $FS(k_1, k_2, \dots) \cup FP(k_1, k_2, \dots)$ היא מונוכרומטית (אפילו אם מגבילים רק למכפלות וסכומים של שני איברים בדיוק!). בעזרת עובדה זו, הינדמן הראה שאין על-מסנן על הטבעיים שמקיים $p + p = p \cdot p$.

בעזרת משפט רמזי, נראה לי שאפשר להוכיח את המשפט הבא:

משפט. לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש $n_1, n_2, \dots$ שונים, כך שהקבוצות

$$\begin{aligned} \{n_i + n_j : i \neq j\} \\ \{n_i n_j : i \neq j\} \end{aligned}$$

שתיהן מונוכרומטיות (לא בהכרח מאותו צבע).

משימה 1: האם ניתן, במשפט האחרון, להבטיח שהקבוצות $FS(n_1, n_2, \dots) \setminus \{n_1, n_2, \dots\}$ ו $FP(n_1, n_2, \dots) \setminus \{n_1, n_2, \dots\}$ שתיהן מונוכרומטיות (לאו דווקא מאותו צבע)?

משימה 2: יהיו $n_1, n_2, \dots$ טבעיים שונים. האם בהכרח, לכל צביעה של $FS(n_1, n_2, \dots)$ במספר סופי של צבעים, יש $i_1 < i_2 < \dots$ כך ש $FS(n_{i_1}, n_{i_2}, \dots)$ מונוכרומטית.

סביר להניח שהתשובה למשימה 2 שלילית, אבל אני יודע באמת.