

צבעים ומספרים: שאלות לתיזה 3

בועז צבאן, בר־אילן, ה'תשע"א

3 באפריל 2011

נער ממשפט הינדמן את ההנחות על הסמיחבורה, או הראה, על ידי דוגמא נגדית, שאי אפשר לנערן.

מני שלוסברג הסב את תשומת לבי שכמו שציינו בהרצאה, הסמיחבורה הטריויאלית $(\mathbb{N}, *)$ שבה הפעולה היא $n * m = 1$ לכל n, m מהווה דוגמא נגדית למשפט הינדמן בלי ההנחות: אפשר לצבוע את 1 באדום ואת כל השאר באדום, ואז אין קבוצת FP מונוכרומטית. אבל אפילו סמיחבורה זו מקיימת את הטענה הבאה.

טענה: לכל סמיחבורה אינסופית S ולכל צביעה של אברי S במספר סופי של צבעים, יש איברים שונים $a_1, a_2, \dots \in S$ כך שכל האיברים, פרט אולי למספר סופי, בקבוצה $FP(a_1, a_2, \dots)$ הם מאותו הצבע. במלים אחרות, יש קבוצה סופית F כך ש $FP(a_1, a_2, \dots) \setminus F$ היא מונוכרומטית.

משימה: מצא דוגמא נגדית לטענה, או הוכח אותה.