

צבעים ומספרים: שאלות לתיזה 2

בועז צבאן, בר־אילן, ה'תשע"א

14 במרץ 2011

שאלה לשבוע רביעי ואילך: הורד את המאמר שבקישור מאתר הקורס, או לחילופין מהקישור הבא

<http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2009.04.014>

אפשר להוריד את הקובץ בהתחברות דרך האוניברסיטה.

קרא את הוכחת למה 1.12 במאמר זה. מספיק להבין את המקרה $d = 2$ שם, ובתור התחלה הנח שמדובר בעל-מסנן לא ראשי (ולא סופר-מסנן כאמור שם, שהיא תכונה חלשה יותר). במקרה זה, "רמזי חזק" ו"רמזי חלש" זה אותו דבר, ואפשר לפשט את ההוכחה מעט.

כעת, נסה לחזור על ההוכחה כאשר נתון על-מסנן שהוא גם אידמפוטנטי וגם "רמזי חזק", מתוך מטרה להוכיח את המשפט הבא.

משפט: יהי p על-מסנן אידמפוטנטי על $\mathbb{N}$ (לגבי פעולה החיבור או הכפל, לבחירתכם), שהוא גם "רמזי חזק". אזי, לכל צביעה של הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש $a_1, a_2, \dots$ שונים, כך ש $\{a_1, a_2, \dots\} \in p$, והקבוצה $FP(a_1, a_2, \dots)$ היא מונוכרומטית.

הערות:

1. לא בדקתי. אולי ה"משפט" שגוי ואולי לא מנוסח טוב. אולי הוא רק יכול לתת רעיון למשפט מעניין שאפשר להוכיח. זה חלק מהמחקר הנדרש.
2. גם הפרכה תתקבל, אבל עליי להזהיר שזה ידרוש טיעון תורת-קבוצותי (אינדוקציה טרנספיניטית). קיום על-מסנן רמזי חזק דורש אקסיומה לא יכיחה, כגון השערת הרצף (שאתם יכולים להניח אם זה עוזר להפרכה).
3. כיוון נוסף הוא להראות, ישירות, שעל-מסנן אידמפוטנטי לא יכול להיות רמזי חזק. אין לי מושג (לא ניסיתי לבדוק) האם התכונות מתיישבות.
4. בכתה הוכחנו, למעשה, שלכל $A \in p$ (שאפשר להניח שהיא מונוכרומטית), A מכילה קבוצה מהצורה $FP(a_1, a_2, \dots)$. אבל ייתכן שהקבוצה $FP(a_1, a_2, \dots)$ עצמה, ובפרט $\{a_1, a_2, \dots\}$, אינה שייכת ל p .
5. כל תוצאה בכיוון יכולה להתפתח לדברים מפתיעים. בפרט, ייתכן שתתקבל הוכחה אלמנטרית פשוטה למשפט הינדמן, בעזרת אימוץ הרעיונות לסופר-מסננים.
6. תיקונים, הצעות (חוץ מלצאת לחופשה בחו"ל), והערות יתקבלו בברכה.