צבעים ומספרים: שאלות לתיזה

בועז צבאן, בר־אילן, ה'תשע"א

14 במרץ 2011

שאלה לשבוע ראשון ושני: משפט שור אומר שלמשוואה $x^n + y^n = z^n \pmod p$ יש פתרון, כאשר n קבוע ו p ראשוני מספיק גדול.

למעשה, לא צריך שהחזקות יהיו זהות, כיון שאפשר לקחת את מכפלתן: אם מעוניינים לפתור את המשוואה

$$x^n + x^m = z^d \pmod p,$$

מספיק לפתור את המשוואה $x^N + y^N = z^N \pmod p$, כאשר $N = nmd$, כיון שאפשר לכתוב אותה

$$(x^{md})^n + (y^{nd})^m = (z^{nm})^d \pmod p.$$

אבל, שיטות ייעודיות של תורת המספרים (קרקטרים) מראות שלכל משוואה עם מקדמים שלמים

$$k_1 x_1^{n_1} + k_2 x_2^{n_2} + \cdots + k_m x_m^{n_m} = 0 \pmod p$$

יש פתרון, לכל ראשוני מספיק גדול p!

האם ניתן להוכיח עובדה זו בצורה קומבינטורית?

הנה דוגמא פשוטה שאפשר להתחיל ממנה: הוכח, בעזרת משפט רמזי או וריאציה שלו, שלכל ראשוני מספיק גדול p, יש פתרון לא טריויאלי למשוואה

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 \pmod p$$

לחילופין, מצא הצעה למשפט צביעה שתספיק להוכחת טענה כזו.

תודה למיכאל פרידמן על השאלה היפה.