סיכום מתוך Jech2K

הסידור הקנוני של $\alpha\times\alpha$

סידור של $Ord \times Ord$ כך שכל $\alpha\times\alpha$ רישא שלו; $Ord\times Ord \cong Ord$; ולמונה ולעוד α-ים, $\alpha \cong \alpha\times\alpha$.

$(\alpha,\beta) < (\gamma,\delta)$ אם: $\max\{\alpha,\beta\} < \max\{\gamma,\delta\}$, $\underbrace{\text{או שהם שווים ; } \alpha<\gamma\text{, או שווים ; } \beta<\delta\text{.}}_{\text{סדר לקסיקוגרפי}}$

לכל α, $\alpha\times\alpha = \overset{(0,\alpha)}{Ord}$

$\Gamma : Ord\times Ord \to Ord$
$(\alpha,\beta) \mapsto type(Ord_{(\alpha,\beta)}, <)$. $\Gamma(\omega\times\omega)=\omega$ (כל הרישות סופיות) ; $\Gamma(\alpha\times\alpha)$ כו' עולה $\Leftarrow$ $\alpha \le \Gamma(\alpha\times\alpha)$.
גם רציפה $\Leftarrow$ יש נק' שבת של Γ כו' לא חסומה.
(כל $\underbrace{\omega^\alpha}_{\text{סודר}}$ הוא נק' שבת).

קופינליות

α גבול $\Leftarrow$ $cf(\alpha)$ מונה סדיר.

לכל קב' לא חסומה ב- κ יש עוצמה $\ge cf(\kappa)$.

$\aleph_{\alpha+\omega}$ חריג ; $\aleph_{\alpha+1}$ סדיר.

$\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$

weakly inaccessible - $\boxed{\text{אי נשיג בחלש}}$: גבול + רגולרי. + לא קיים (~~####~~ עקבי יכיח)

$\Leftarrow$ $\aleph_\alpha \ge \alpha = \underset{\text{רגולרי}}{cf(\alpha)} = \underset{\alpha\text{ גבול}}{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha \ge \alpha$, $\aleph_\alpha = \alpha$. זה נורה הרבה (הסידרה נורמלית יש ∞ נק' שבת), אבל לא בהכרח רגולריים...

הישר הממשי

הישר - הסדר היחיד עם $\underbrace{\text{חסם עליון לכל קב' חסומה מלעיל}}_{\boxed{\text{סדר שלם}}}$.

כל סדר קווי ב"מ צפוף ולא חסום איזומורפי ל $\mathbb{Q}$. (אם $\{a_n\},\{b_n\}$ כנ"ל, מגדירים $f(a_0), f^{-1}(b_0), f(a_1), f^{-1}(b_1), \ldots$)

$(\mathbb{R},<)$ הוא הסדר היחיד שהוא: קווי, שלם, ומכיל תת ב"מ איזומורפית ל$(\mathbb{Q},<)$.

בעיית סוסלין

$(\mathbb{P},<)$ ~~עם~~ סדר קווי מקיים ccc אם אין משפחה לא-ב"מ של קטעים פתוחים זרים. $(\mathbb{R},<)$ מקיים ccc.

?: נניח $\mathbb{P}$ ~~###~~ קווי, שלם, לא חסום, צפוף, ccc ! . האם $\mathbb{P}\cong\mathbb{R}$? (מחליפים את הדרישה של $\mathbb{Q}$ צפופה ב"מ ב- ccc)
אינה כריעה.

מרחב בייר

לכל עץ T, $[T]$ סגורה ב ω^ω: $f\notin[T]$ פירושו $f{\restriction}n\notin T$ ולכן גם $\overset{\text{קב' פתוחה}}{\overline{\text{כל השכנים}}}$, שמסכימים עד n.

נק' מבודדת ב $[T]$ = f כך שמאיזשהו n, אין ל$f{\restriction}n$ שתי הרחבות סותרות.

משפט קניג - הקנטור נפוץ ב ω^ω.

$\boxed{\text{מידת לבג על } \omega^\omega}$: ~~מגבלה~~ תבנה את המידה $\mu(n)=\frac{1}{2^{n+1}}$ על $\mathbb{N}$. $\Leftarrow$ $\mu([s]) = \prod \frac{1}{2^{s(k)+1}}$.

$\boxed{\text{מרחב פולני}}$: הומיאומורפי למטרי שלם ספרבילי. ~~########~~

* משפט: כל מרחב פולני הוא תמונה ~~#~~ רציפה של ω^ω.

הערות

* יש לפחות c טיפוסי סדר ב"מ: לכל $a_n \in \omega^\omega$, $\tau_a := a_0+\omega+a_1+\omega+\dots$ נותן עבור $a\neq b$ טיפוסים שונים $\tau_a \neq \tau_b$.
* נק' הרציפות של פו' f הן G_δ.
* כל מרחב פולני פרפקטי מכיל עותק של 2^ω.
* (? כל מרחב פולני הומיאומורפי לקב' G_δ ב $[0,1]^\omega$: (יה $\{x_n\}_n$ צפופה; $x \overset{\varphi}{\mapsto} \{d(x,x_n)\}_n$.

אקסיומת הבחירה

אפילו כשכל קב' ב- F בגודל 2, לא ניתן להוכיח קיום פו' בחירה.

* ב- ZF: איחוד מני של קב' ב"מ הוא ב"מ.
* $|\bigcup S| \le |S|\cdot \sup\{|X| : X\in S\}$ $\Leftarrow$ $\aleph_{\alpha+1}$ רגולרי. (כי > $\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha$)

Countable AC: לכל F ב"מ יש פו' בחירה.

$\Leftarrow$ איחוד ב"מ של קב' ב"מ הוא ב"מ $\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ לא ב"מ.

$\aleph_1$ רגולרי.

(לא גורר סדר טוב של $\mathbb{R}$)

Dependent Choice (DC): אם לכל $a\in A$ יש $b\in A$ עם bRa, אז יש סדרה $\dots a_2 R a_1 R a_0$

$AC \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} DC \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} Ctbl\ AC$, ($DC\Rightarrow CAC$: $F=\{A_n\}_n$, נתבונן בפו' בחירה של $\{A_i : i\le n\}$ עם יחס $\supseteq$)

$\therefore$ (DC) $<$ WF $\Longleftrightarrow$ אין סדרה אינסופית יורדת.

חשבון מונים

$(2^\lambda)^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$. * עבור $2^\lambda < \kappa$, $\kappa \le \kappa^\lambda \le 2^\kappa$ (ואם $cf(\kappa)\le\lambda$, אז $\kappa<\kappa^\lambda$) לא ניתן לומר הרבה יותר.

* סימון: $P_\kappa(A) := [A]^{<\kappa}$. אם $\kappa\le|A|$, $|[A]^{<\kappa}| = |A|^{<\kappa}$: ברור אם κ עוקב, ואם גבולי, אז $\boxed{\sum_{i<\kappa}\lambda_i = \kappa\cdot\sup\lambda_i}$ מוביל לאיחוד זר

הכלל, אם $\kappa \le \sup\lambda_i$, $\sum_{i<\kappa}\lambda_i = \sup\lambda_i$ $\Leftarrow$ κ סינגולרי $\Leftrightarrow$ $\kappa=\sum_{i<\lambda}\kappa_i$ עבור $\lambda<\kappa$.

~~חזקות~~ מכפלות אינסופיות:

תכונות - $\prod_i \kappa_i^\lambda = (\prod_i\kappa_i)^\lambda$; $\prod_i \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\sum\lambda_i}$; סדר הכפל לא משנה; $\sum_i\kappa_i \le \prod_i \kappa_i$ (אם כל $2\le\kappa_i$).

* עבור סדרה (אינסופית) עולה, $\prod_{i<\lambda}\kappa_i = (\sup_i \kappa_i)^\lambda$. (לדוג: $\prod_n\aleph_n = \aleph_\omega^\omega$)

(הוכחה: אם $\kappa\doteq\sup\kappa_i$, ברור $\prod_{i<\lambda}\kappa_i \le\kappa^\lambda$. לכיוון ההפוך, מפצלים המכפלה ל- λ מכפלות באורך λ, כ"א $\ge \kappa$.)

König Lemma: $\kappa_i<\lambda_i \rightarrow \sum\kappa_i < \prod\lambda_i$. (הוכחה: אם $S_i \subseteq \prod\lambda_i$, $|S_i|=\kappa_i$, לכל i נבחר $f(i)\notin S_i$, אז $f\notin\bigcup S_i$)

$\therefore$ $cf(2^\kappa)>\kappa$: אם $\kappa_i<2^\kappa$, אז $\sum_\kappa \kappa_i < \prod_\kappa 2^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$ // אולם זה ו- $2^\kappa \le 2^\lambda$ עבור $\kappa<\lambda$, הם היחידים שניתן להוכיח עבור κ רגולרי.

$\therefore$ $cf(\kappa^\lambda)>\lambda$: $\sum_\lambda\kappa_i < \prod_\lambda\kappa^\lambda = \kappa^{\lambda\cdot\lambda}=\kappa^\lambda$ //

$\therefore$ $\kappa^{cf(\kappa)}>\kappa$: $\kappa = \sum_{cf(\kappa)}\kappa_i < \prod_{cf(\kappa)}\kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$ //

תחת GCH:

$$\kappa^\lambda = \begin{cases}\kappa & \lambda<cf(\kappa)\\ \kappa^+ & cf(\kappa)\le\lambda<\kappa \\ \lambda^+ & \kappa\le\lambda\end{cases}$$

כי הטווח של $f\in{}^\lambda\kappa$ חסום ב- κ, לכן $\kappa^\lambda = \bigcup_{\alpha<\kappa}\alpha^\lambda$.

* שימוש: אם λ גבולי, אז $\boxed{2^\lambda = (2^{<\lambda})^{cf(\lambda)}}$ $\quad 2^\lambda = 2^{\sum_{cf\lambda}\lambda_i} = \prod 2^{\lambda_i} \le \prod_i 2^{<\lambda}$

פונקציית הרצף: $\beth_\alpha$

∴ אם $2^\mu=\lambda$ לכל $\mu<\kappa$ (סינגולרי) גדול מספיק, אז $\lambda=2^\kappa$. $\left(2^\kappa=(2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}=(2^\mu)^{cf(\kappa)}=2^\mu=\lambda\right)$.

μ גדול מספיק, $>cf(\kappa)$

פונקציית גימל: $\gimel(\kappa)=\kappa^{cf(\kappa)}$.

* ניתן לבטא באמצעותה את פו' הרצף:

$$2^\kappa=\begin{cases}\gimel(\kappa) & \kappa \text{ עוקב (מספיק רגולרי)}\\ \gimel(2^{<\kappa}) & \kappa \text{ גבול! } \beth_\alpha \text{ אינה קבועה לבסוף מתחת } \kappa\\ \gimel(\kappa)\cdot 2^{<\kappa} & \text{" קבועה לבסוף מתחת } \kappa\end{cases}$$

$\left(2^\kappa=\kappa^\kappa\overset{\text{רגולרי}}{=}\kappa^{cf(\kappa)}\right)$

$\left(2^\kappa=(2^{<\kappa})^{cf\kappa}=\lambda^{cf\lambda}\Leftarrow cf\kappa=cf\lambda\Leftarrow \lambda:=2^{<\lambda}=\lim_{\alpha\to\kappa}2^{|\alpha|}\right)$

(אם רגולרי ראינו, ואם סינגולרי הנ"ל: לעיל).

חזקות כלליות κ^λ

* $\boxed{(\kappa^+)^\lambda=\kappa^\lambda\cdot\kappa^+}$ **נוסחת האוסדורף:** κ^+ רגולרי, לכן $(\kappa^+)^\lambda=\bigcup_{\alpha<\kappa^+}\alpha^\lambda$.

* אם κ גבולי אז וכן $cf\kappa\le\lambda$: $\boxed{\kappa^\lambda=\left(\lim_{\mu\to\kappa}\mu^\lambda\right)^{cf\kappa}}$ $\left(\kappa=\sum_{cf\kappa}\kappa_i\le\prod_{cf(\kappa)}\kappa_i\right)$

משפט *

$\boxed{\text{חישוב אינדוקטיבי}}$

$$\kappa^\lambda=\begin{cases}2^\lambda & \kappa\le\lambda\\ \mu^\lambda & \text{יש } \mu<\kappa \text{ עם } \kappa\le\mu^\lambda\\ \kappa & \text{אם } \lambda<\kappa\text{, } \mu^\lambda<\kappa \text{ לכל } \mu<\kappa \text{ ו-} \lambda<cf\kappa\\ \kappa^{cf\kappa} & cf\kappa\le\lambda\end{cases}$$

(אם κ עוקב משתמשים בנוס' האוסדורף. אחרת, הנוסחה שאחריה עבור זה האחרונה.)

∴ κ^λ פ' 2^λ, κ, $\gimel(\mu)$ כאשר μ עם $cf\mu\le\lambda<\mu$ (אם $\kappa\cdot2^\lambda<\kappa^\lambda$, ניקח את ה-$\mu$ הראשון עם $\kappa^\lambda=\mu^\lambda$ ונקבל השוויון ע"י μ במקום κ).

$\boxed{\text{גבול חזק}}$: $2^\lambda<\kappa$ לכל $\lambda<\kappa$. דוגמה ZFC: $\aleph_0$, $\beth_\omega$, $\sup\{\alpha,2^\alpha,2^{2^\alpha},\dots\}$ לכל α.

$\Longleftarrow$ $\mu^\lambda<\kappa$ לכל $\lambda,\mu<\kappa$,

$\Longleftarrow$ $2^\kappa=\kappa^{cf(\kappa)}$, $\left(2^\kappa=(2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}=\kappa^{cf\kappa}\right)$.

$\boxed{\text{אי נשיג}}$ (חזק): $\kappa>\aleph_0$, רגולרי, וגבול חזק.

הערה: היחס בין אי-נשיג למונים קטנים ממנו הוא כמו היחס בין $\aleph_0$ לסופיים. (תחת GCH מתלכד עם אי-נשיגות חלשה)

Singular Cardinal Hypothesis (SCH): לכל κ (סינגולרי), $2^{cf\kappa}<\kappa\Rightarrow\kappa^{cf\kappa}=\kappa^+$.

$GCH\Rightarrow SCH$, $\neg SCH\rightarrow$ מונה גדול מפורש (שקול במידה שווה).

תחת SCH: החזקה נקבעת ע"י פו' הרצף למונים רגולריים: אם κ סינגולרי: אם $\beth$ קבועה לבסוף מתחת κ, $2^\kappa=2^{<\kappa}$. אחרת $2^\kappa=(2^{<\kappa})^+$.

(אינד' על κ)
- אם $\kappa\le2^\lambda$: $\kappa^\lambda=2^\lambda$ (ברור).
- אם $2^\lambda<\kappa$, $\lambda<cf\kappa$: $\kappa^\lambda=\kappa$,
- " $cf\kappa\le\lambda$: $\kappa^\lambda=\kappa^+$.

אם κ גבול ו-$\lambda<cf(\kappa)$ אז $\kappa^\lambda=\sum_{\alpha<\kappa}|\alpha|^\lambda$

הערות
- κ אי-נשיג חלש (גבול רגולרי) $\leftarrow$ $\kappa^{<\kappa}=2^{<\kappa}$
- κ אי-נשיג (חזק) $\leftarrow$ $\kappa^{<\kappa}=\kappa$ (כי רגולרי)
- κ סינגולרי ולא גבול חזק $\leftarrow$ $\kappa<2^{<\kappa}=\kappa^{<\kappa}$
- κ סינגולרי וגבול חזק $\leftarrow$ $2^{<\kappa}=\kappa$, $\kappa^{<\kappa}=\kappa^{cf\kappa}$.

= אקסיומת הרגולריות / יסודיות =

בכל קב' יש איבר ∈-מינימלי ⟸ בכל מחלקה $\neq\emptyset$ יש כזה (עובד ב- trcl של איבר במחלקה)

ההיררכיה המצטברת: $V_0=\emptyset$; $V_{\alpha+1}=P(V_\alpha)$; $V_\gamma=\bigcup_{\alpha<\gamma}V_\alpha$. באינדוקציה: V_α טר'; $V_\alpha\in V_\beta \Leftarrow \alpha<\beta$; $\alpha\subseteq V_\alpha$.

ומרגולריות, $\bigcup V_\alpha = V$ (נניח x ∈-מינ' בין אלו שאינם, אזי לכל $z\in x$ יש α עם $z\in V_\alpha$ ומהחלפה $\exists\gamma\ x\subseteq V_\gamma \Rightarrow x\in V_{\gamma+1}$).

$rank(x)=\min\{\alpha: x\in V_{\alpha+1}\}$; $V_\alpha=\{x: rank\,x<\alpha\}$; $rank(x)=\sup\{rank(z)+1: z\in x\}$

$x\in y \Rightarrow rank\,x<rank\,y$ ($y\in V_\alpha \Rightarrow x\in y\subseteq V_{\beta<\alpha}$) ; $rank\,\alpha=\alpha$.

<u>שימוש</u>: הגדרת מחלקות שקולות ע"י חיתוך שקולות שהם מחלקות וכו', ע"י ההתמקדות באיברי המחלקה שהם ∈-מינימליים.

<u>עקרון האוסף</u>: אם C_i, $i\in I$ (I קב') מחלקות, אז יש קב' Y שחותכת כל C_i לא ריקה.

<u>∈-אינדוקציה</u>: (תהא T טר'. אם) $\Phi(\emptyset)$ ו-Φ עוברת מאיברי קב' לקב' עצמה, אז $\Phi[T]$.

<u>∈-רקורסיה</u>: T טר' ⟸ אפשר להגדיר $F(x)=G(F\restriction x)$.

* למחלקות טר' אין ∈-איזומורפיזם פרט לזהות.

<u>יחסים מבוססים היטב</u>: יהא E על מחלקה C $\boxed{\text{מבוסס היטב}}$ אם: (1) לכל קב' $x\subseteq C$ יש איבר E-מינימלי. (2) לכל $x\in C$, $ext_E(x)=\{y\in C: yEx\}$ קב'.

∴ לכל תת-מחלקה $\emptyset\neq\tilde C\subseteq C$ יש איבר E-מינימלי. ⟸ E-אינדוקציה/רקורסיה.

$\rho(x)=\sup\{\rho(z)+1: zEx\}$ ⟸ $xEy \Rightarrow \rho(x)<\rho(y)$.

<u>המיכוך הטרנזיטיבי</u>: $\pi(x):=\{\pi(y): yEx\}$. $im\,\pi$ מחלקה טרנזיטיבית; $xEy\Rightarrow\pi(x)\in\pi(y)$.

Mostowski Collapsing Thm. אם E הוא extensional, אז π חח"ע, ! M טרנזיטיבי $im\,\pi=M$; $(C,E)\cong(M,\in)$

בפרט, כל מחלקה אקסטנציונלית ($x\neq y\in M \Rightarrow x\cap M\neq y\cap M$) איז' למח' טר'.

<u>הערות</u>: $|V_\omega|=\aleph_0$, $|V_{\omega+\alpha}|=\beth_\alpha$, $|V_\kappa|=\kappa$ אם κ <u>אי-נשיג</u>.

אם $rank\,x, rank\,y\le\alpha$ אז ה-rank של $\{x,y\}$, (x,y), $x\cup y$, $\bigcup x$, $P(x)$, x^y כולם $<\alpha+\omega$ (למעשה $\le\alpha+6$, $\pm$).

= מסננים ואלגברות בוליאניות =

* אם $\mathcal F$ משפחה של מסננים, $\bigcap\mathcal F$ מסנן. * כל G עם FIP ניתן להרחיב למסנן (לחתוך-סופי, ולסגור למעלה).
* U $\boxed{\text{על-מסנן}}$ (מסנן על S הוא) אם מכריע: לכל $X\subseteq S$, $X\in U$ או $S\setminus X\in U$. המושג הדואלי: $\boxed{\text{אידיאל ראשוני}}$ .. $X\in I$ או $S\setminus X\in I$.

⇕ מסנן מקסימלי ע"ז (שלא ניתן להרחיב). (⇑ כי אם לא מוכרע, חיתוך כל איבר במסנן וניתן להוסיפה).
* S סופית ⟸ כל מסנן על S הוא ראשי. כל מסנן ראשי הוא על-מסנן.
* כל על-מסנן המרחיב את Fréchet הוא לא-ראשי.
* יש 2^{2^κ} (המקס' האפשרי) על-מסננים על κ. אפשר לדרוש שהם $\boxed{\text{אוניפורמיים}}$ (לכל $X\in U$, $|X|=\kappa$):

משפחה A של ת"ק של κ היא $\boxed{\text{בלתי תלויה}}$ אם לכל $X_i,Y_i\in A$, $|X_1\cap..\cap X_n\cap\kappa\setminus Y_1\cap..\cap\kappa\setminus Y_m|=\kappa$.

ויש משפחה ב"ת $\subseteq P(\kappa)$ שעוצמתה 2^κ (ואז כל פו' ב-2^κ מגדירה בסיס לעל-מסנן [יחד עם הקב' ..-$<\kappa$]).

המשפחה הב"ת: יהא P האוסף של כל $(F,\mathcal F)$ עם $F\subseteq\kappa$ סופית, $\mathcal F$ משפחה סופית של ת"ק של κ. עבור $u\subseteq\kappa$, $X_u:=\{(F,\mathcal F): F\cap u\in\mathcal F\}$, $A=\{X_u: u\subseteq\kappa\}$. $|P|=\kappa$ לכן מושלם.

<u>על-מסננים על ω</u>

* על-מסנן לא ראשי D על ω הוא $\boxed{\text{P-נק'}}$ אם: לכל חלוקה $\omega=\bigcup A_n$, $A_n\notin D$, יש $X\in D$ עם $X\cap A_n$ סופי לכל n. (יחיד עבור כל ה-A_n-ים)

— " — D — " — $\boxed{\text{מסנן רמזי}}$ אם: — " — , — " — $|X\cap A_n|=1$ לכל n (שקול: $|X\cap A_n|\le1$).

<u>משפט</u> * CH ($t=c$) ⟸ קיים על-מסנן <u>רמזי</u>: יהיו $\mathcal A_\alpha$, $\alpha<c$ כל החלוקות של ω. נבנה סדרה יורדת X_α. בהינתן X_α, ניקח $X_{\alpha+1}\subseteq X_\alpha$ שחותך את $\mathcal A_\alpha$ ($X_{\alpha+1}\subseteq A\in\mathcal A_\alpha$ לי') אם אפשר, אחרת ניקח כזה ש-$|X_{\alpha+1}\cap A|\le1$ לכל $A\in\mathcal A_\alpha$. בשלב גבולי ניקח כמעט-חיתוך. זה בסיס למסנן רמזי. ∥

* מסנן $\boxed{\kappa\text{-שלם}}$ (κ רגולרי): $\bigcap_{i<\lambda<\kappa} X_i\in F$ אם $X_i\in F$. אידיאל κ-שלם: $\bigcup_{i<\lambda<\kappa}X_i\in I$. מסנן Fréchet-$\kappa$ הוא κ-שלם. (עבור κ רגולרי)
* <u>האם על-מסנן</u> על קב' יכול להיות $\aleph_1$-שלם (σ-שלם)? אם כן, אז יש מונים גדולים.

אלגברות בוליאניות

הכללה של אלגברה של קב' (סגורה לאיחודים ומשלימים)

אלגברה בוליאנית B : $0,1\in B$ ושלוש פעולות $+,\cdot$ בינריים ; $-$ אונרי.

$+,\cdot$ אסוציאטיביים, קומוטטיביים, ודיסטריבוטיביים (שניהם!), בולעים ($u\cdot(u+v)=u$, $u+u\cdot v=u$) וגם $u\cdot(-u)=0$, $u+(-u)=1$.

תכונות: $u+u=u$, $u\cdot u=u$, $u+0=u$, $u\cdot 0=0$, $u+1=1$, $u\cdot 1=u$, חוקי דה-מורגן: $-(u+v)=(-u)\cdot(-v)$, $-(u\cdot v)=(-u)+(-v)$

u,v **זרים** אם $u\cdot v=0$. $\boxed{u-v := u\cdot(-v)}$; $\boxed{u\le v}$: $u-v=0$ $\iff$ $u\cdot v=u$ $\iff$ $u+v=v$.

$u\vee v=u+v$, $u\wedge v=u\cdot v$.

הסדר $\le$ קובע את האלגברה הבוליאנית.

אלגברת לינדנבאום : L שפה מסדר ראשון עם יחס שקילות $\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$ $\Leftarrow$ $B=L/_\sim$ עם $[\varphi]+[\psi]=[\varphi\vee\psi]$, $[\varphi]\cdot[\psi]=[\varphi\wedge\psi]$, $-[\varphi]=[\neg\varphi]$, $0=[\neg\varphi]$, $1=[\varphi\vee\neg\varphi]$.

* $B^+ := B\setminus\{0\}$. עבור $a\in B^+$, $B\restriction a := \{u\in B: u\le a\}$ עם משלים $a-u$.

$a\in B^+$ **אטום** אם אין קטנים ממנו. B **אטומית** אם לכל u יש $a\le u$ אטום, B **חסרת אטומים** אם אין אטומים.

הומומורפיזם של אלג' בוליאניות : $h(0)=0$, $h(1)=1$, ושומר פעולות $+,\cdot,-$. ($\Leftarrow$ הומ' סדר)

שיכון = הומ' + חח"ע.

* כל איזומורפיזם סדר הוא גם איז' של אלג' בוליאניות.

אידיאלים ומסננים על אלג' בוליאניות

אידיאל : $0\in I$, $1\notin I$, סגור לסכום (סופי) ולהקטנות. מסנן : $0\notin F$, $1\in F$, סגור למכפלות (סופיות) ולהגדלות.

אידיאל ראשי = $\{u: u\le u_0\}$, מסנן ראשי $\{u: u\ge u_0\}$.

תכונת החיתוך הסופי $u_1\cdots u_n\neq 0$ $\Leftarrow$ תת-בסיס לאלג' בוליאנית.

* אם $h: B\to C$ הומ', אז $\ker(h)$ אידיאל ב-B, וכל אידיאל הוא גרעין של הומ':

אם I אידיאל אז $u\sim v$ לפי $u\Delta v := (u-v)+(v-u)\in I$ יחס שקילות,

ומסמנים $B/I := B/_\sim$ **אלגברת המנה** כאשר $[u]+[v]=[u+v]$ וכו'. אז $u\mapsto[u]$ הומ' עם גרעין I.

I **ראשוני** אם $u\in I$ או $-u\in I$ לכל u, בדומה F **על מסנן**. (שניהם שקולים למקסימליות)

* I ראשוני $\iff$ $B/I=\{0,1\}$.

* התכונה שכל אידיאל מוכל באידיאל ראשוני חלשה מאקסיומת הבחירה.

<u>משפט ההצגה של Stone</u> : כל אלגברה בוליאנית איזומורפית לאלגברה של קבוצות. ($u\mapsto\{p$ על מסנן $: u\in p\}$)

* <u>פעולות אינסופיות</u>: $\sum\{u:u\in X\}:=\sup X$; $\sum\emptyset:=0$. $\prod\{u:u\in X\}:=\inf X$; $\prod\emptyset:=1$. (לא תמיד קיימים)

אלג' בול' **שלמה** : $\sum,\prod$ מוגדרים לכל קב'. (מספיק אחד מהם לקבל השני)

κ-שלמה : $\sum,\prod$ קיימים על קב' מעוצמה $<\kappa$. בדומה: אידיאל/מסנן κ-שלם על B.

* אם I אידיאל <u>κ-שלם</u> בא"ב B <u>κ-שלמה</u>, אז B/I κ-שלם, למעשה $[\sum u]=\sum[u]$. ובדומה עבור מסנן ומכפלות.

A **צפופה** ב-B אם לכל $b\in B^+$ יש $a\in A^+$, $b\ge a$. B **השלמה** של A אם B <u>שלמה</u> ו-A <u>צפופה</u> ב-B ! (יחידה עד איזומורפיזם)

* לכל א"ב יש השלמה. (דומה לחתכי דדקינד: **חתך** הוא קב' U סגורה כלפי מטה, **חתך רגולרי** הוא חתך כך שלכל $p\notin U$ יש $q\le p$ עם $B\restriction q\cap U=\emptyset$.
אוסף החתכים הרגולריים הוא א"ב שלמה, עם $u\cdot v=u\cap v$, $u+v=\overline{u\cup v}$, כאשר $\overline{U}$ = חיתוך הרגולריים המכילים את U (בעצמו חתך רגולרי))

תת-אלגברות שלמות ורגולריות

הומומורפיזם/שיכון **שלם** הוא כזה שמקיים $h(\sum X)=\sum h[X]$; $h(\prod X)=\prod h[X]$.

* כל <u>איז'</u> הוא איז' סדר, ולכן <u>שלם</u> (שומר sup, inf).

$A\subseteq B^+$ **אנטי-שרשרת** אם לכל $u,v\in A$, $u\cdot v=0$. אם $\sum A=u$, אז A **חלוקה** של u. חלוקה של 1 = <u>אנטי-שרשרת מקסימלית</u>

B_1 תת-אלגברה **רגולרית** של B_2 אם כל אנטי-שרשרת ב-B_1 היא גם אנטי-שרשרת ב-B_2

* B_1,B_2 שלמות $\Leftarrow$ B_1 תת-רגולרית. B_1 <u>צפופה</u> ב-B_2 $\Leftarrow$ B_1 ת"א רגולרית.

רוויה

B **κ-רוויה** אם אין חלוקה (= אנטי-שרשרת מקסימלית) מעוצמה κ $\iff$ B היא **κ-c.c.** : אין סדרה יורדת מאורך κ. ~~[illegible]~~

* אם יש אנטי-שרשרת מעוצמה μ אז יש מכל עוצמה $<\mu$. $\boxed{sat(B)}$:= ה-κ הראשון כך ש-B κ-רוויה.

* אם B <u>אינסופי ושלם</u>, אז $sat(B)>\aleph_0$ ורגולרי.

<u>דיסטריבוטיביות</u>: אם B שלם, $\sum_{i,j}u_iv_j=\sum_i u_i\sum_j v_j$. B **κ-דיסט'** אם: $\prod_{\alpha<\kappa}\sum_{i\in I_\alpha}u_{\alpha,i}=\sum_{f\in\prod I_\alpha}\prod_{\alpha<\kappa}u_{\alpha,f(\alpha)}$

חלוקה W **מעדנת** חלוקה Z אם לכל $w\in W$ יש $Z\ni z\geq w$.

$D\subseteq B$ **פתוחה וצפופה** אם צפופה וסגורה כלפי מטה.

* עבור א"ב שלמה B: B κ-דיסט' ⟺ חיתוך κ קב' פתוחות-צפופות היא פתוחה צפופה (זה במינימום) ⟺ לכל κ חלוקות יש עידון משותף.

הוכחה: (1→2) יהי $\{u_{\alpha,i}: i\in I_\alpha\} := \{u\cdot v: v\in D_\alpha\}$ עבור $u\neq 0$. כל $\sum u_{\alpha,i}=u \Leftarrow u=\prod\sum u_{\alpha i}=\sum_f \prod_\alpha u_{\alpha f(\alpha)}$, כל $u_f\in\bigcap D_\alpha$ ואחד מהם $\neq 0$.

(2→3) סגירה כלפי מטה של אנטי-שרשרת נותנת קב' פתוחה צפופה. בחיתוך המובטח קח אנטי-שרשרת מקסימלית.

(3→1) תמיד $\sum\prod u_{\alpha,f(\alpha)}\le\prod\sum u_{\alpha i}$. $\geq$: $u:=\prod_\alpha\sum u_{\alpha i}$ בה"כ $u=1$ ועדן ה-$u_{\alpha i}$ כך שיהיו זרים מבלי לשנות הסכום. זה לא יגדיל את $\sum\prod u_{\alpha i}$. כל $W_\alpha:=\{u_{\alpha i}\}_i$ חלוקה. $W:=\bigwedge W_\alpha$ לכל $w\in W$ יש f עם $w\le\prod u_{\alpha f(\alpha)}$ ולכן $\sum\prod u_{\alpha f(\alpha)}=1$. //

הערות

D הוא p-נק' ⟺ לכל $D\ni A_0\supseteq A_1\supseteq\dots$ יש כמעט-חיתוך. (התבונן בקב' $A_{n+1}\setminus A_n$)

D הוא רמזי ⟺ לכל $f:\omega\to\omega$, f קבועה או חח"ע על איבר של D (התבונן בקב' $f^{-1}\{i\}$)

הסדר של רודין-קיסלר (על-מסננים לא ראשיים): $\boxed{D\le_{RK}E}$ אם יש $f:\omega\to\omega$ כך ש-$D=f_*(E):=\{A\subseteq\omega: f^{-1}[A]\in E\}$.

$\boxed{D\equiv E}$ אם יש תמורה $f:\omega\to\omega$ כך ש-$D=f_*(E)$.

* אם $D=f_*(D)$ אז $[f=id]\in D$. (מראים ש-$[f<id],[f>id]\notin D$, ע"י חלוקה לפי זוגיות האורך של סדרות $n>f(n)>f^2(n)\dots$ ולהיפך.)
* ⟸ אם $D\le_{RK}E\le_{RK}D$ אז $D\equiv E$. (כי ההרכבה היא זהות על קב' ב-D ואפשר להמשיך בה.)
* D הוא $\le_{RK}$-מינימלי ⟺ D הוא רמזי:

1. אם f חסומה מוד' D, אז $f_*(D)$ ראשי (נק'), אחרת $f_*(D)$ לא ראשי.
2. (⇐) אם f חסומה מוד D, אז קבועה על קב' ב-D. אחרת $D\le f_*(D)$ (מינ' D), כלומר יש g עם $D=g_*(f_*(D))$ ולכן $D\ni[g\circ f=id]$ לכן f חח"ע מוד D.

(⟹) אם $E=f_*(D)$ לא ראשי אז f לא חסומה מוד D ולכן (רמזיות) חח"ע מוד D ⟸ $D\equiv E$.

* אם κ חריג, אין מסנן לא-ראשי κ-שלם על κ: 1. $[\kappa]^{<\kappa}\cap D=\emptyset$: אחרת $A\in[\kappa]^{<\kappa}\cap D$, ניקח סדרה יורדת ממש מקסימלית של D שמוכלת ב-A. עוצמתה $<\kappa$ לכן יש לה חיתוך ב-D, B, ואז $D=\{B\}$. ↯

2. $\kappa=\bigcup_{i<\lambda<\kappa}A_i$ עם $|A_i|<\kappa$ ולכן $A_i\notin D$ לכל i, סתירה ל-κ-שלמות.

∴ לכל מסנן לא-ראשי על ω, $\emptyset=\bigcap D$, $[\omega]^{<\omega}\cap D=\emptyset$. (כמו (1) בהוכחה האחרונה).

* אם A תת-אלגברה של א"ב B, אז האלגברה הנוצרת ע"י $A\cup\{u\}$ היא $\{a\cdot u+(b\cdot -u): a,b\in A\}$. ∴ אם A סופית אז $|A|\le 2^{2^k}$ (נוצרת).
* א"ב ב"מ ללא אטומים הן איזומורפיות.

? * $A\subseteq B$ א"ב, $u\in B\setminus A$ ⟸ יש ע"מ $F\ni u\notin G$ כך ש-$F\cap A=G\cap A$.

∴ * אם $|B|=\kappa$ אז יש לפחות κ מסננים של B.

* בא"ב שלמה יש פילוג מוכלל ודה-מורגן מוכלל.

משפט ההרחבה של סיקורסקי: הומ' מתת-אלגברה לתוך א"ב שלמה ניתן להרחבה להומ' מכל הא"ב לשלמה א"ב.

* B שלמה ואינסופית ⟵ $|B|^{\aleph_0}=|B|$.
* B κ-שלמה + κ-c.c. ⟵ B שלמה. (תהי $X\subseteq B$, בה"כ X פתוחה. תהא $A\subseteq X$ אנטי-שרשרת מקסימלית ⟸ $|A|<\kappa$ ⟸ $\sum A\overset{!}{=}\sum X$ (ויש).)

= קבוצות שבת =

סל"חים

α **גבולי** של X אם: α גבולי, $\sup(X\cap\alpha)=\alpha$.

$\kappa>\aleph_0$ רגולרי. $C\subseteq\kappa$ **סל"ח** אם: לא חסומה, מכילה את כל נק' הגבול שלה. (⟺ לכל $\gamma<\kappa$! γ-סדרה עולה ב-C, גבולה ב-C).

$S\subseteq\kappa$ **שבת** אם: לכל סל"ח C, $S\cap C\neq\emptyset$.

* אם $C,D\subseteq\kappa$ סל"חים, אז $C\cap D$ סל"ח: ברור שסגורה. לכל $\alpha<\kappa$ ניקח $\alpha<\sigma_1^C<\delta_1^D<\sigma_2^C<\delta_2^D<\dots$ $C\ni\lim\sigma_i=\lim\delta_i\in D$. //

מסנן הסל"חים $=\{X$ כך ש-$X\supseteq C$ סל"ח$\}$

* $\{\alpha\in\kappa:\alpha$ גבולי$\}$ סל"ח; לכל $A\subseteq\kappa$ לא חסומה, אוסף נק' הגבול של A סל"ח.

$f:\kappa\to\kappa$ **רציפה** אם $f(\gamma)=\lim_{\xi<\gamma}f(\xi)$ עבור γ גבולי. **נורמלית** אם: עולה ורציפה.

∴ תמונה של פו' נורמלית היא סל"ח, ולהיפך: כל מניה של סל"ח היא פו' נורמלית.

* מסנן הסל"חים הוא κ-שלם: באינדוקציה על $\gamma<\kappa$, מראים $\bigcap_{\xi<\gamma}C_\xi$ סל"ח. עבור γ עוקב זה $\overset{\text{סל"ח}}{\bigcap_{\xi<\gamma-1}C_\xi}\cap C_\gamma$ סל"ח. γ גבולי: בה"כ הסדרה יורדת $\dots\supseteq C_1\supseteq C_0$. ניקח בינים סדרה עולה שאיבריה בכל C_ξ: $\alpha<\alpha_1<\alpha_2<\dots$; $\lim\alpha_\xi\in\bigcap C_\xi$ ⟸ לא חסומה, (וברור שסגורה). //

חיתוך אלכסוני של $X_\alpha\subseteq\kappa$: $\boxed{\triangle_{\alpha<\kappa}X_\alpha:=\{\xi<\kappa:\xi\in\bigcap_{\alpha<\xi}X_\alpha\}}$.

* $\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha \overset{\checkmark}{=} \Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha \setminus (\alpha+1)$; $\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha \overset{\checkmark}{=} \bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \cup (\alpha+1))$

* משפט: אם כל C_α סל"ח, אז $C := \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ סל"ח: $\Delta_\alpha C_\alpha = \Delta_\alpha(\bigcap_{\xi\le\alpha} C_\xi)$, לכן בה"כ $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots$.

C סגורה: תהא α גבולי ב-C, $\alpha=\lim\alpha_i$. אם $\xi<\alpha$, $\alpha=\lim\alpha_i\in C_\xi \Leftarrow \alpha_i\in C_\xi \leftarrow \xi<\alpha_i$.

C לא חסומה: יהי α. ניח $\alpha<\beta_0\in C_0$, $\beta_n<\beta_{n+1}\in C_{\beta_n}$, $C\ni\beta=\lim_n\beta_n$. (לכל n, הסדרה לבסוף ב-C_{β_n}, לכן $\beta\in C_{\beta_n}\subseteq C_\xi$ לכל $\xi<\beta$.)||

* A אינה שבת $\iff$ A^c מכילה סל"ח (שייך למסנן הסל"חים). $\boxed{I_{NS}}$ = האידיאל של קב' שאינן שבת = האידיאל הדואלי למסנן הסל"חים.

I_{NS} κ-שלם ונסגור לאיחוד אלכסוני: $\nabla_{\alpha<\kappa} X_\alpha := \{\xi : \xi\in\bigcup_{\alpha<\xi} X_\alpha\}$ (מסומן גם $\sum_{\alpha<\kappa} X_\alpha$)

* $P(\kappa)/I_{NS}$ κ^+-שלמה: $\bigwedge_\alpha[X_\alpha]=[\Delta_\alpha X_\alpha]$, $\bigvee_\alpha[X_\alpha]=[\nabla_\alpha X_\alpha]$. ($[B]\le[\Delta X_\alpha] \leftarrow B\setminus\Delta X_\alpha = \nabla(B\setminus X)\in I_{NS} \leftarrow B\setminus X_\alpha\in I_{NS} \leftarrow [B]\le[X_\alpha]$.)

⇐ אם X_α, Y_α מניות של אותה משפחה, אז $\bigwedge[X_\alpha]=\bigwedge[Y_\alpha]$, כלומר ΔX_α, ΔY_α שונים רק בקב' ב-I_{NS}.

פו' f על S היא $\boxed{\text{רגרסיבית/נסוגה}}$: $f(\alpha)<\alpha$ (לכל $0<\alpha\in S$).

* משפט Fodor: אם f נסוגה על קב' שבת $S\subseteq\kappa$, אז f קבועה על קב' שבת $T\subseteq S$.

הוכחה: אם $f^{-1}\{\gamma\}\in I_{NS}$ לכל $\gamma<\kappa$, אז $\nabla_{\gamma<\kappa} f^{-1}\{\gamma\}\in I_{NS}$, כ"א יש סל"ח C שזרה לו. ניח $\alpha\in S\cap C$ ⇐ לכל $\gamma<\alpha$ $\alpha\notin f^{-1}\{\gamma\}$ ⇐ $f(\alpha)\ge\alpha$ ↯

($\lambda<\kappa$ רגולרי) $\boxed{S^\kappa_\lambda\ (\text{או: } E^\kappa_\lambda) =: \{\alpha<\kappa : cf(\alpha)=\lambda\}}$ שבת. (לא חסומה: בנה סדרה מעל כל α. סגורה: $\alpha_0<\alpha_1<\dots$, לכל $\xi<\lambda$ ניח $\beta_\xi=\bigcup_i\beta^{(i)}_\xi \xrightarrow{\xi\to\lambda}\alpha$). ?מראה רק $cf\alpha\le\lambda$?

* מסנן הסל"חים אינו על-מסנן: יש שבת X עם $\kappa\setminus X$ שבת: אם $\omega_1<\kappa$ ניח את S^κ_ω, $S^\kappa_{\omega_1}$ (זרות). עבור $\kappa=\omega_1$ יש משפט להלן (דורש AC)

* משפט (Solovay): כל קב' שבת ניתן לחלק ל-κ קב' שבת זרות. (למה: אם כל $\alpha\in S$ מונה רגולרי, אז $\{\alpha : S\cap\alpha$ אינה שבת$\}$ שבת: לכל סל"ח C, ניח $\alpha:=\min C'$, אז $C\cap\alpha$ סל"ח זרה ל-$S\cap\alpha$.)

מוני Mahlo

* κ אי-נשיג ← $\{\mu<\kappa : \aleph_\mu=\mu\}$ סל"ח; $\{\mu<\kappa : \mu$ גבולי$\}$ סל"ח, ואפילו $\{\mu<\kappa : \mu$ גבול חזק$\}$ סל"ח.

∴ κ האי-נשיג הראשון ← $\{\mu<\kappa : \mu$ גבול חזק סינגולרי$\}$ סל"ח. והוא הדין אם κ הוא האי-נשיג ה-α, $\alpha<\kappa$ (הסרת $\alpha<\kappa$ מסל"ח משאירה במסנן הסל"חים) במקרה זה הקב' מכילה סל"ח.

κ הוא $\boxed{\text{Mahlo}}$ אם: κ אי-נשיג + $\{\mu<\kappa : \mu$ רגולרי$\}$ שבת. (⇐ κ גדול מ-κ האי-נשיגים הראשונים).

* κ Mahlo ⇐ $\{\mu<\kappa : \mu$ אי-נשיג$\}$ שבת ⇐ κ הוא האי-נשיג ה-κ.

κ הוא $\boxed{\text{Mahlo חלש}}$ אם: κ אי-נשיג בחלש + $\{\mu<\kappa : \mu$ רגולרי$\}$ שבת. (⇐ $\{\mu<\kappa$ אי-נשיג בחלש$\}$ שבת).

∴ κ Mahlo חלש ← κ האי-נשיג החלש ה-κ.

מסננים נורמליים: מסנן F על κ הוא $\boxed{\text{נורמלי}}$ אם הוא סגור תחת חיתוכים אלכסוניים. (אידיאל הוא $\boxed{\text{נורמלי}}$ אם המסנן הדואלי נורמלי)

* משפט: מסנן הסל"חים הוא: κ-שלם, נורמלי, ומכיל קב' לא-חסומות, והוא הקטן ביותר עם תכונות אלו.

* מסנן נורמלי על κ המכיל את כל הקב' $\kappa\setminus\alpha$ מכיל את כל הסל"חים. ($C_0 := \Delta_\alpha\{\xi : \alpha+1<\xi\}$ = הגבוליים. לכל סל"ח $C=\{a_\alpha:\alpha<\kappa\}$, $(C\supseteq C_0\cap\Delta_\alpha\{\xi : a_\alpha<\xi\})\in$ מסנן.)

משפט סילבר (Silver)

למה 1: κ סינגולרי עם $\omega<cf\kappa$; $\lambda^{cf\kappa}<\kappa$ לכל $\lambda<\kappa$; $\kappa_\alpha \xrightarrow[\alpha\to cf\kappa]{\text{נורמלי}} \kappa$ ויש שבת α-ים עם $\kappa_\alpha^{cf\kappa_\alpha}=\kappa_\alpha^+$ ⇐ $\kappa^{cf\kappa}=\kappa^+$. (בפרט אם יש GCH מתחת ל-κ, $\kappa^{cf\kappa}=\kappa^+$)

למה 2: $\kappa_\alpha^{cf\kappa}<\kappa$ לכל α; $F\subseteq\prod_{\alpha<cf\kappa}A_\alpha$ פו' שונות לבסוף! ויש שבת α-ים עם $|A_\alpha|\le\kappa_{\alpha+1}$ ⇐ $|F|\le\kappa^+$.

למה 2 ⇐ למה 1: לכל $h: cf\kappa\to\kappa$ נגדיר $f_h=(h_\alpha : \alpha<cf\kappa)$: $h_\alpha(\xi)=h(\xi)$ אם $<\kappa_\alpha$, 0 אחרת. $F:=\{f_h : h\in\kappa^{cf\kappa}\}\subseteq\prod\kappa_\alpha^{cf\kappa}$ (פו' שונות לבסוף)

$C=\{\alpha$ גבולי; לכל $\lambda<\kappa_\alpha$, $\lambda^{cf\kappa}<\kappa_\alpha\}$ סל"ח (סגורה-קל; לא חסומה - מראים עם תהליך אלכסוני ... κ_α ... $cf\kappa$ ולוקחים sup) (לכל $\alpha\in C$, $cf\kappa_\alpha=cf\alpha<cf\kappa$) ומתקיים $\kappa_\alpha^{cf\kappa}=\kappa_\alpha^{cf\kappa_\alpha}$ וזה κ_α^+ על שבת α-ים ⇐ $\kappa^{cf\kappa}=|F|\le\kappa^+$ ||.

הוכחת למה 2: הרעיון דומה, עם κ_α, κ במקום $\kappa_{\alpha+1}$, κ^+. הוכחה: בה"כ יש שבת α-ים עם $A_\alpha\subseteq\kappa_\alpha$, ונצמצם לגבוליים שבהם, S_0. לכל $f\in F$ יש $\alpha\in S_0$ עם $g(\alpha)=\beta$ כך ש $f(\alpha)<\kappa_\beta$. g רגרסיבית על S_0. Fodor ⇐ $S\subseteq S_0$ שעליה g קבועה, כלומר f חסומה על S. $f\mapsto(S, f|S)$ חח"ע. לכל S יש "מעט" פו' חסומות על S, ואין הרבה כאלה $(S, f|S)$.

לקבלת למה 2, לוקחים את המסנן המכיל את הסל"חים, זה משרה סדר על אברי F. $F_f := \{g\in F : \exists^{\text{שבת}}\alpha\ g(\alpha)<f(\alpha)\}$, $\le\kappa$ מלמה אחרונה, לכן $|F|\le\kappa^+$ ||.

היררכיה של קב' שבת

$cf\alpha>\omega$ ⇐ אפשר לדבר על סל"חים ב-α, ונקבל מסנן סל"חים $cf\alpha$-שלם, נורמלי. $S\subseteq\alpha$ $\boxed{\text{שבת}}$ אם יש $f: cf\alpha\to\alpha$ (לכל!) כך ש $f^{-1}[S]$ שבת ב-$cf\alpha$. (S חותכת כל סל"ח ב-α)

$\boxed{\text{פעולת Mahlo}}$ על קב' שבת $S\subseteq\kappa$: (עקבה) $Tr(S) := \{\alpha<\kappa : cf\alpha>\omega,\ S\cap\alpha$ שבת ב-$\alpha\}$. תכונות: $S\subseteq T \Rightarrow Tr(S)\subseteq Tr(T)$

$Tr(S\cup T)\overset{\checkmark}{=}Tr(S)\cup Tr(T)$ (I_{NS} אידיאל)

$Tr(S)\overset{\checkmark}{\subseteq}S$, לכן $Tr(Tr(S))\subseteq Tr(S)$

∴ $S=T \bmod I_{NS} \Rightarrow Tr(S)=Tr(T) \bmod I_{NS}$

לכן $Tr(S)$ פעולה על $P(\kappa)/I_{NS}$.

$\boxed{\text{לכמעט כל }\alpha\in S'}$ (פירוש): ה-α-ים ב-S' שלא מקיימים מהווים קב' לא-שבת.

$\boxed{S'<T}$: לכמעט כל $\alpha\in T$, ($\omega<cf\alpha$!) $S\cap\alpha$ שבת. ($T\subseteq Tr(S) \iff$ מוד' I_{NS})

* תכונות: $\operatorname{Tr} A \not< A$; $A<B<C \Rightarrow A<C$ ($A \subseteq \operatorname{Tr}(A) \subseteq B \subseteq \operatorname{Tr}(B) \subseteq C$ mod I_{NS}); $<$ מבוסס על I_{NS}

* שלילה: $<$ מבוסס היטב על קב' השבת: נניח $A_1 > A_2 > \dots$ שבת, נניח בה"כ עם $A_n\cap C_n \subseteq \operatorname{Tr}(A_{n+1})$; $B_n = A_n\cap C_n\cap C'_{n+1}\cap C''_{n+2}\cap\dots$ שבת $\subseteq \operatorname{Tr}(B_{n+1})$

$\alpha_n := \min B_n \Rightarrow B_{n+1}\cap\alpha_n$ שבת $\Rightarrow \alpha_{n+1}<\alpha_n$. ↯

עבור $S\subseteq\kappa$ שבת, $\boxed{\text{הסדר}}$ (order) של S: הדרגה לפי $<$: $o(A)=\sup\{o(X)+1 : X<A\}$; $o(\alpha):=o(\mathrm{cf}\,\alpha)$; $o(\aleph_0):=0$

$\boxed{\text{הסדר של } \kappa}$: הגובה של $<$; $o(\kappa)=\sup\{o(S)+1 : S\subseteq\kappa \text{ שבת}\}$.

* אם λ המונה הרגולרי ה-α אז $o(S^\kappa_\lambda)=\alpha$.
* $o(\kappa)\ge\kappa \iff \kappa$ אי-נשיג חלש, $o(\kappa)\ge\kappa+1 \iff \kappa$ Mahlo חלש.

סל"חים על $P_\kappa(\lambda)$

κ רגולרי $>\aleph_0$, $\kappa\le|A|$. $X\subseteq P_\kappa(A)$ $\boxed{\text{לא חסומה}}$ אם לכל $x\in P_\kappa(A)$ יש $x\subseteq y\in X$ (כלומר: X קופינלית ב-$(P_\kappa(A),\subseteq)$).
X $\boxed{\text{סגורה}}$ אם סגורה לאיחוד שרשראות מעוצמה $<\kappa$. סל"ח = סגורה ולא חסומה. שבת = חותך כל סל"ח.

* אם $|A|=|B|$ אז $P_\kappa(A)\cong P_\kappa(B)$ גם מבחינת סל"חים ושבת, לכן בעצם מדברים על $P_\kappa(\lambda)$ כאשר $\lambda\ge\kappa$.
* $\kappa\subseteq P_\kappa(\kappa)$ (!) סל"ח, ומסנן הסל"חים על κ = הצמצום של מסנן הסל"חים על $P_\kappa(\kappa)$ לתת-הקב' של κ.
* מסנן הסל"חים על $P_\kappa(\lambda)$ κ-שלם. (כמו במקרה הרגיל)

$\boxed{\text{חיתוך אלכסוני}}$ ב-$P_\kappa(\lambda)$: $\triangle_{\alpha<\lambda} X_\alpha := \{x\in P_\kappa(\lambda) : x\in\bigcap_{\xi\in x} X_\xi\}$

* מסנן הסל"חים על $P_\kappa(\lambda)$ סגור לחיתוך אלכסוני. (הוכחה דומה לרגילה)

אנלוג למשפט Fodor (Jech): f רגרסיבית על שבת $S\subseteq P_\kappa(\lambda)$ ($f(x)\in x$ לכל $\emptyset\ne x\in S$) $\Rightarrow$ f קבועה על קב' שבת $\subseteq S$.

$D\subseteq P_\kappa(\lambda)$ $\boxed{\text{מכוונת}}$ אם $x,y\in D \Rightarrow$ יש $x\cup y\subseteq z\in D$.

* $C\subseteq P_\kappa(\lambda)$ סגורה $\Rightarrow$ C κ-מכוונת. (באינדוקציה על $|D|<\kappa$. אם כל $D'\subseteq D$ מעוצמה קטנה יותר היא מכוונת, אפשר לבנות שרשרת קופינלית ב-D).

תהא $f:[\lambda]^{<\omega}\to P_\kappa(\lambda)$. $x\in P_\kappa(\lambda)$ $\boxed{\text{נק' סגור}}$ של f אם לכל $a\subseteq x$, $f(a)\subseteq x$ (כ"א $[x]^{<\omega}$ "סגורה" תחת f)

* folklore: נק' הסגור של f C_f הוא סל"ח. (וגם) ולכל סל"ח $C\subseteq P_\kappa(\lambda)$ יש $C_f\subseteq C$; C_f יוצרים את מסנן הסל"חים על $P_\kappa(\lambda)$.

הוכחה: בונים, באינדוקציה על $|a|<\omega$, איברים $f(a)\in C$ כך ש-$a\subseteq b \Rightarrow f(a)\subseteq f(b)$. אז לכל נק' סגור x של f, $x=\bigcup\{f(e): e\in[x]^{<\omega}\}$ איחוד של קב' מכוונת ולכן $\in C$.∎

עבור $A\subseteq B$ עם $\kappa\le|A|$, $\boxed{\text{ההטלה}}$ של $X\subseteq P_\kappa(B)$ ל-A היא $X\upharpoonright A=\{x\cap A: x\in X\}$.

$\boxed{\text{ההרמה}}$ של $Y\subseteq P_\kappa(A)$ ל-B היא $Y\downharpoonright B=\{x\in P_\kappa(B): x\cap A\in Y\}$

משפט (Menas): ההטלה של קב' שבת היא שבת, וההרמה של קב' שבת היא שבת. ((1) ההרמה של סל"ח היא סל"ח (2) ההטלה של סל"ח מכילה סל"ח:
$C\subseteq P_\kappa(B)$. נניח $C_f\subseteq C$ ונגדיר $g:[A]^{<\omega}\to P_\kappa(A)$ ע"י $x\mapsto x\cap A$ כאשר x נק' הסגור הקטנה ביותר של f המכילה את e. אז $C_g = C_f\upharpoonright A$.)

משפט (Kueker): לכל סל"ח $C\subseteq P_{\aleph_1}(A)$ יש פעולה פונקציונלית F על A כך ש-$C_F\subseteq C$ $:=\{x\in[A]^{\omega}: x \text{ סגורה תחת } F\}$ (לא ניתן להכללה ל-$\kappa>\omega_1$).

הערות

* אוסף נק' השבת של פו' נורמלית הוא סל"ח.
* לכל $f:\kappa\to\kappa$ יש שבת α-ים כך ש-$f(\xi)<\alpha$ לכל $\xi<\alpha$.
* ה-κ הראשון כך ש"κ הוא ה-κ אי-נשיג ה-κ" אינו Mahlo (כ"א התכונות אינן שקולות): הפו' $\lambda\mapsto\alpha$ כך ש-λ האי-נשיג ה-α רגרסיבית.
* אם κ אי-נשיג חלש / גבולי / Mahlo חלש וקב' כל המונים שהם גבול חזק $<\kappa$ אינה חסומה ב-κ, אז κ גבול חזק / אי-נשיג / Mahlo בהתאמה. $(1\Rightarrow; 1\to 2; 2\to 3)$.
* אידיאל κ-שלם I על κ הוא נורמלי $\iff$ לכל $S\notin I$ ו-f רגרסיבית על S יש $\tilde S\subseteq S$ ש-$\tilde S\notin I$ כך ש-f קבועה על $\tilde S$. (הכללה של Fodor)
(⇐) כמו Fodor. (⇒): יהיו $X_\alpha\in I$. אם $S:=\nabla X_\alpha\notin I$. נגדיר f על S: $\alpha\mapsto\xi^\alpha$ כך ש-$\alpha\notin X_\xi$. f רגרסיבית, לכן קבועה $=\xi$ על $\tilde S\subseteq S \Rightarrow \tilde S\cap S=\emptyset$ ↯.
* אין אידיאל לא-ראשי נורמלי על ω
*? κ סינגולרי ו-F מסנן המכיל את כל הקו-חסומות $\Rightarrow$ F לא נורמלי.
* $\operatorname{Tr}(S^\kappa_\lambda)=\{\alpha<\kappa: \mathrm{cf}\,\alpha>\lambda\}$.
* לכל $a\in P_\kappa(A)$, $[a]=\{x\in P_\kappa(A): a\subseteq x\}$ סל"ח.
* מסנן F על $P_\kappa(A)$ הוא $\boxed{\text{נורמלי}}$ אם: לכל $a\in A$, $\{x\in P_\kappa(A): a\in x\}\in F$, וכן F סגור לחיתוכים אלכסוניים.

מסנן נורמלי κ-שלם על $P_\kappa(A)$ מכיל את כל הסל"חים.

משפטי חלוקה

מדברים על $[A]^n$ עם ה-n-יות העולות ב-A.

* משפט Ramsey: $\omega \to (\omega)^n_k$: לכל חלוקה של $[\omega]^n$ ל-k תתי-קבוצות, יש ת"ק הומוגנית (=מונוכרומטית) אינסופית.

הוכחה: באינדוקציה על n. $n=1$ מיידי. נניח ל-n, ותהי $F:[\omega]^{n+1}\to k$ צביעה. לכל $a\in\omega$, $F_a(X):=F(X\cup\{a\})$ צביעה של $[\omega\setminus\{a\}]^n$, לכן לכל $S\subseteq\omega$ אינסופית יש ת"ק $H_a^S\subseteq S\setminus\{a\}$ F_a-מונוכרומטית.
מגדירים: $a_0=0$, $S_0=\omega$, $S_{i+1}\subseteq S_i\setminus\{a_i\}$ F_{a_i}-מונוכרומטית, $a_{i+1}=\min S_{i+1}$ $(>a_i)$. אז: כל $\{a_m : m>i\}$ היא F_{a_i}-מונוכרומטית, נסמן הצבע ב-$G(a_i)$. אז יש $H\subseteq\{a_i\}_i$ שעליה G קבועה. אזי $[H]^{n+1}$ היא F-מונוכרומטית: לכל $x_0<\dots<x_n$ ב-H, $G(x_0)=F_{x_0}(x_1..x_n)=F(x_0,\dots,x_n)$ ‖

* על-מסנן D על ω הוא רמזי $\iff$ $\omega\to(D)^n_k$: לכל k-צביעה של $[\omega]^n$ יש קב' הומ' $H\in D$.

$\Rightarrow$: אם $\omega=\bigcup_n A_n$ חלוקה לקב' קטנות ($\notin D$), נגדיר $F:[\omega]^2\to 2$ ע"י $F(x,y)=1 \iff x,y$ נמצאים באיברים שונים של החלוקה. אם $H\in D$ הומ', אז $|H\cap A_n|\le 1$.
$\Leftarrow$: למה: אם $X_0\supseteq X_1\supseteq\dots$ שרשרת ב-D אז יש $a_0\in X_0$, $a_1\in X_{a_0}$, ... כך ש-$\{a_n\}_n\in D$ (קח Y כמעט-חיתוך, y_0 המינ' שממנו $Y\subseteq X_0$, $y_1>y_0$ שממנו $Y\subseteq X_{y_0}$ וכו', אז $A_n=[y_n,y_{n+1})$ חלוקה של Y ולכן יש פילטור $z_n\in A_n$, $\{z_n\}\in D$. לכל n $z_{n+2}\in X_{z_n}$ ואז או $\{z_{2n}\}$ או $\{z_{2n+1}\}\in D$ ומקיים הדרוש)
הוכחת $\Leftarrow$ באינד' על n. בדומה לרמזי, לכל $a\in\omega$ יש $H_a\subseteq\omega\setminus\{a\}$ F_a-מונוכרומטי. קח $X\in D$ כך שהקבוע של F_a זהה לכל $a\in X$; $X_n=X\cap H_0\cap..\cap H_n$, וקח $H=\{a_n\}$ כבלמה. ‖

$\boxed{\kappa\to(\lambda)^\mu_\sigma}$: לכל צביעה של $[\kappa]^\mu$ ב-σ צבעים, יש ת"ק $A\subseteq\kappa$ מונוכרומטית בעוצמה λ. (מעניין רק עבור: $\lambda\le\kappa$, $2\le\sigma<\kappa$)
נשאר נכון אם: κ גדל, או σ,μ,λ קטנים.

* $\mu=1$: נכון אם $\kappa=\lambda+\sigma<cf\kappa$, או $\lambda<\kappa$.

* $2^\kappa\not\to(\omega)^2_\kappa$, ולמעשה $2^\kappa\not\to(3)^2_\kappa$: $F(\{f,g\})=\min\{\alpha: f(\alpha)\ne g(\alpha)\}$, אז לא ייתכן $F(\{f,h\})=F(\{g,h\})=F(\{f,g\})$ ל-f,g,h שונים.

* $2^\kappa\not\to(\kappa^+)^2_2$ (בפרט $\kappa^+\not\to(\kappa^+)^2_2$): נקבע סדר טוב על 2^κ ונגדיר $F(\{f,g\})=1 \leftrightarrow$ הסדר הטוב מסכים עם הסדר המילוני. אבל $\kappa^+\not\hookrightarrow(2^\kappa,<_{lex})$, $(\kappa^+)^*$.

משפט Erdős-Rado: $\beth_n^+\to(\aleph_1)^{n+1}_{\aleph_0}$ (בפרט $(2^{\aleph_0})^+\to(\aleph_1)^2_{\aleph_0}$; למרות ש-$2^{\aleph_0}\not\to(\aleph_1)^2_{\aleph_0}$), וזה הטוב ביותר לכל n.

הוכחת $n=1$: $\kappa:=(2^{\aleph_0})^+$; $F:[\kappa]^2\to\omega$. יש $A\subseteq\kappa$, $|A|=2^{\aleph_0}$ כך שלכל $C\subseteq A$ בת"מ ולכל $u\in\kappa\setminus C$ יש $v\in A\setminus C$ כך ש-$F_v\restriction_C=F_u\restriction_C$. (בונים $A_0\subseteq A_1\subseteq\dots$ כך ש-$A_{\alpha+1}$ מטפל בקב' $C\subseteq A_\alpha$ ולכל $|A_\alpha|=2^{\aleph_0}$, אפשרי כי יש רק $2^{\aleph_0}$ פו' כאלמנטים ל-C; $A:=\bigcup_{\alpha<\omega_1}A_\alpha$.)
נקח $a\in\kappa\setminus A$ ובהינתן $C=\{x_\beta:\beta<\alpha\}$ נבחר x_α כך ש-$F_{x_\alpha}\restriction C=F_a\restriction C$. $X:=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. $\alpha<\beta \Rightarrow F(\{x_\alpha,x_\beta\})=F_{x_\beta}(x_\alpha)=F_a(x_\alpha)\in\omega$, לכן יש $H\subseteq X$ בעוצמה $\aleph_1$ ש-F_a קבועה עליה, ואז H הומוגנית עבור F. שלב האינדוקציה דומה, עם $\beth_{n+1}$ במקום $\aleph_0$ וכו'. ‖

עבור α סודר גבולי, $\boxed{\kappa\to(\alpha)^\mu_\sigma}$: יש $H\subseteq\kappa$ מטיפוס סדר α (הומוגנית). $\boxed{\kappa\to(\alpha,\beta)^n}$: יש הומוגנית מטיפוס α וצבע 0, או מטיפוס β וצבע 1.

* Baumgartner-Hajnal: $\aleph_1\to(\alpha)^2_2$ לכל $\alpha<\omega_1$.
עקבי (עם CH) ש-$\aleph_2\not\to(\omega_1+\omega)^2_2$.

* Dushnik-Miller: $\kappa\to(\kappa,\omega)^2$.

מונים קומפקטיים בחלש

κ $\boxed{\text{קומפקטי חלש}}$ אם $\kappa\to(\kappa)^2_2$.

* קומפקטי חלש $\Rightarrow$ אי-נשיג: רגולרי: חלוקה $\kappa=\bigcup_{\gamma<\lambda<\kappa}A_\gamma$ מגדירה צביעה ב-$[\kappa]^2$ שעוצמתה $<\kappa$ (ניקח הומ' חלוקה לצבעים או בגודל 1 מכל קבוצה). ↯.
גבול חזק: $2^\lambda\not\to(\lambda^+)^2_2$, לכן אם $\lambda<\kappa\le2^\lambda$, $\kappa\not\to(\kappa)^2_2$, ↯.

עצים

$\boxed{\text{עץ}}$: קס"ח כך שכל רישא סדורה היטב. $\boxed{\text{רמה }\alpha}$ של T: ה-x-ים כך ש-$tp(\frac{\hat{x}}{T})=\alpha$. $\boxed{\text{הגובה}}$ של T = ה-α הראשון שרמה α ריקה.
$\boxed{\text{ענף}}$ = שרשרת מקסימלית בעץ. $\boxed{\text{אורך}}$ של ענף = טיפוס הסדר שלו; $\boxed{\alpha\text{-ענף}}$ = ענף באורך α.

* קיום Suslin: האם סדר קווי צפוף + ccc $\Rightarrow$ ספרבילי.

$\boxed{\text{ישר Suslin}}$ (Suslin line): סדר קווי צפוף + ccc שאינו ספרבילי (= דוג' נגדית לבעיית Suslin)

$\boxed{\text{עץ סוסלין}}$: גובה ω_1 + כל ענף הוא בן-מניה + כל אנטי-שרשרת היא בת-מניה.

T עבור $\alpha\le\omega_1$: $\boxed{\alpha\text{-עץ נורמלי}}$: גובה α + שורש (איבר מינימלי) יחיד + כל רמה בת-מניה + לכל x שאינו מקסימלי יש אינסוף עוקבים מיידיים + לכל x יש $x<y$ בכל רמה $<\alpha$ + לכל $\beta<\alpha$ גבולי: x ברמה β יש המשך יחיד ($=x$) ל-$\frac{x}{T}$ ברמה β (בגבול, הרישה קובעת את x).

משפט *: אם יש עץ Suslin, אז יש עץ Suslin נורמלי ($=\omega_1$-נורמלי): א. נצמצם הנק' ש-T_x ב"מ. לכל x, בכל רמה מעליו, יהיה y עם $|T_y|=\aleph_1$

?

ב. עץ כל שרשרת משרבבים איבר חדש ומגדירים שהוא קטן מכל אלו שגדולים מהשרשרת. לכל x יש $\aleph_1$ נק' גדולות ממנו.

ג. לוקחים את הנק' שהן נק' פיצול, ד. לוקחים את הגבולות שבהן.

* עץ נורמלי מתאים לעץ של סדרות עם יחס הכלה.

משפט *: יש ישר Suslin $\iff$ יש עץ Suslin

הוכחה: ($\Leftarrow$) הבונים עץ של קטעים סגורים על הישר (עם הכלה). $I_0=[a_0,b_0]$ ובשלב α, $\{a_\beta,b_\beta:\beta<\alpha\}$ אינה צפופה - נבחר $[a_\alpha,b_\alpha]$ שזר לה. $T=\{I_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ עץ סוסלין.

(כל שני קטעים הם זרים או מוכלים, לכן $c\subset c$; והקצוות השמאליים של שרשרת יורדת מחלקים הישר לקטעים זרים, לכן השרשרות ב"מ).

($\Rightarrow$) בהינתן עץ סוסלין נורמלי, לכל x בעץ יש $\aleph_0$ עוקבים מיידיים - נסדרם כמו $\mathbb{Q}$, ונסדר את T לקסיקוגרפית. זה יהיה ישר סוסלין. צ"ל ספרביליות וצפיפות:

לכל $S'\ni(a,b)\neq\emptyset$ יש $x\in T$ עם $I_x\subseteq(a,b)$, $I_x=\{c\in S': x\in c\}$ ולכן מקטעים זרים מקבלים אנטי-שרשרת באותה עוצמה ב-T. לא ספרבילי: אם $C\subseteq S'$ ב"מ, יש $\alpha>$ גובה כל הענפים ב-C ונק' של תיגון I_x שאינו מכיל אף איבר של C.//

$\boxed{\text{עץ Aronszajn}}$: גובה ω_1 + כל רמה ב"מ + כל ענף ב"מ.

משפט Aronszajn: יש עץ Aronszajn. מסוים.

הוכחה: בונים עץ שאבריו הם סדרות עולות של רציונלים, עם יחס סדר הכלה (לכן אין ω_1-ענף). הרמה ה-α, U_α, מקיימת: לכל $\beta<\alpha$, $x\in U_\beta$, $q>\sup x$ יש $y\in U_\alpha$ $x\subseteq y$ עם $\sup y\le q$

(כדי שנוכל להמשיך הבניה בגבול) בשלב עוקב לוקחים את כל ההמשכים $q^\frown x$ ($q>\sup x$) של x-ים קיימים.

בשלב גבולי: לכל x קיים ולכל $q>\sup x$ יש $y\supseteq x$, $\sup y\le q$ כך ש-$x\subseteq y\in$ לכל $\beta<\alpha$ מעל הגובה של x. נבחר y כזה לכל x. $T=\bigcup_{\alpha<\omega_1}U_\alpha$ עץ ארונשיין.//

* מההוכחה, יש $f:T\to\mathbb{R}$ ששומרת סדר (ניקח $f=\sup$) אפשר להביא ל-$f:T\to\mathbb{Q}$ ששומרת סדר, וזה נקרא $\boxed{\text{עץ Aronszajn מיוחד}}$.

זרבי: כל עץ Aronszajn הוא מיוחד.

קבוצות ופונקציות כמעט זרות

משפחה Z של קב' סופיות היא $\boxed{\text{מערכת-}\Delta}$ אם יש S כך שלכל $x,y\in Z$ שונים, $S=x\cap y$.

למת מערכת ה-Δ (Shanin): כל אוסף W, $|W|>\aleph_0$, מכיל מערכת-Δ Z, $|Z|>\aleph_0$.

הוכחה: יש ת"ק של W שכל איבריה בגודל n, נצמצם לה ונוכיח באינד' על n. n=1 מיידי. וכו: אם יש a משותף ל-$\aleph_1$ מהם, נוריד ונשתמש באינד'. אחרת בוחרים באינדוקציה, בכל פעם, איבר שזר לקודמים.//

הכללה: אם $\kappa^{<\kappa}=\kappa$ (למשל אם GCH), $|W|=\kappa^+$ ואברי W מעוצמה $<\kappa$, אז יש $Z\subseteq W$, $|Z|=\kappa^+$ שהיא מע'-Δ. (לבדוק)

$X,Y\in[\kappa]^\kappa$ $\boxed{\text{כמעט-זרים}}$ אם $|X\cap Y|<\kappa$ (בד"כ κ רגולרי). $\boxed{\text{משפחה כמעט זרה}}$ = אבריה כמעט-זרים בזוגות.

* יש משפחה כמעט-זרה של קב' $\subseteq\omega$ בעוצמה $2^{\aleph_0}$ (סדרות קושי ב-$\mathbb{Q}$ או ענפי $2^{<\omega}$).
* לא ניתן לקבל ב-ZFC יותר מ-κ^+ קב' כמעט-זרות $\subseteq\kappa$:

κ רגולרי. פו' f,g על κ הן $\boxed{\text{כמעט-זרות}}$ אם שונות לבסוף (יש α<κ שממנו והלאה הן שונות).

* κ רגולרי. יש κ^+ פו' כמעט-זרות מ-κ ל-κ. (כי כל משפחה מעוצמה κ ב-κ^κ היא חסומה).

T $\boxed{\text{עץ Kurepa}}$: גובה ω_1 + כל רמה ב"מ + לפחות $\aleph_2$ ענפים לא ב"מ.

* T עץ נורמה ← $\geq\aleph_2$ קב' כמעט-זרות $\subseteq\aleph_1$ ואפילו $\geq\aleph_2$ פו' כמעט-זרות מ-ω_1 ל-ω.
* קיום עץ Kurepa לא תלוי באקס' ZFC. אי-קיומו עקבי כמו קיום אי-נגיש. (equiconsistent).
* עץ Kurepa קיים $\iff$ יש $\mathcal F\subseteq P(\omega_1)$, $|\mathcal F|\ge\aleph_2$, ולכל $\alpha<\omega_1$, $\{X\cap\alpha: X\in\mathcal F\}$ ב"מ.

?

הוכחה: ($\Leftarrow$) $|T|=\aleph_1$, לכן אפשר להניח $T=\omega_1$ ואם $\alpha<_T\beta$ אז $\alpha<\beta$. ניקח $\mathcal F$ = ה-ω_1-ענפים ב-T.

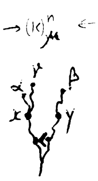
($\Rightarrow$) לכל $X\in\mathcal F$ נגדיר $f_X(\alpha):=X\cap\alpha$; $V_\alpha=\{f_X\restriction\alpha: X\in\mathcal F\}$; $T=\bigcup_{\alpha<\omega_1}V_\alpha$, אזי $(T,\subseteq)$ עץ Kurepa.//

- $\kappa>\aleph_0$ רגולרי הוא בעל $\boxed{\text{תכונת העץ}}$ (tree property) אם: לכל עץ בגובה κ שרמותיו בעוצמה $<\kappa$ יש κ-ענף. (ω בעל תכונה זאת, ω_1 לא).

*(1) אם κ קומפקטי חלש אז הוא בעל תכונת העץ.

(2) κ אי-נגיש + תכונת העץ ← κ קומפקטי חלש, ואפילו $\kappa\to(\kappa)^n_\mu$ לכל n, $\mu<\kappa$. } (קומפ' חלש ↔ אי-נגיש + תכונת העץ.)

? $\kappa\to(\kappa)^n_\mu \Leftarrow \kappa\to(\kappa)^2_2$ ראמזי? לפי זה.



הוכחה: (1) בה"כ $T=\kappa$. מרחיבים את $<_T$ לסדר לינארי $\prec$ בצורה מילונית. $F:[\kappa]^2\to2$, $F=1\iff <$ מסכים עם $\prec$; $H\in[\kappa]^\kappa$ הומוגנית.

$B:=$ ה-x עם $|\{\alpha\in H: x<_T\alpha\}|=\kappa$. חותכת כל רמה. סדורה $<_T$-ית: נניח $x,y\in B$, $x\ne y$, $x\perp y$ ($x_\xi<y_\xi$ ברמה הראשונה ששונים)

ניקח $x<_T\alpha$; $y<_T\beta$ עם $\alpha<\beta$; $x<_T\gamma$ עם $\beta<\gamma$. אז $\alpha,\gamma\prec\beta$, למרות ש-$\alpha<\beta<\gamma\in H$. ↯

(2) נניח $F:[\kappa]^2\to\mu$ ונבנה עץ $(T,\in)$ של סדרות של בנאים (⇐ כל רמה מעוצמה $<\kappa$). בשלב α בונים t_α באינד' על $\xi<\alpha$: אם $t_\alpha\restriction\xi=t_\beta$ ($\beta<\alpha$), ניקח $t_\alpha(\xi)=F(\{\alpha,\beta\})$. אם אין t_β כזה אז נעצור וניקח $t_\alpha=t_\alpha\restriction\xi$. לכל $t_\beta\in t_\alpha$, $\beta<\alpha$ וכן $F(\{\alpha,\beta\})=t_\alpha(l(t_\beta))$.

יהא B ענף מעוצמה κ ב-T. אזי $H_i=\{\alpha: t_\alpha\in B, t_\alpha{}^\frown i\in B\}$ הומוגניות, ואחת מהן מעוצמה κ.//

$\boxed{\kappa\to(\alpha)^{<\omega}_\mu}$: לכל צביעה $F:[\kappa]^{<\omega}\to\mu$ יש $H\subseteq\kappa$, $H\cong\alpha$ כך שלכל n $[H]^n$ מונוכרומטית. (לא ניתן לדרוש שכולן מאותו צבע!)

* $\omega\not\to(\omega)^{<\omega}_2$: עבור $x\in\omega$ נגדיר $F(x)=1\leftrightarrow |x|\in x$. אם H אינסופית, ניקח $n\in H$, אז יש ב-$[H]^n$ מי שמכילות את n ומי שלא.//

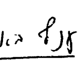
κ הוא $\boxed{\text{רמזי}}$ אם $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$ (⇐ קומפקטי חלש).

הערות

? * נגדיר $exp_0(\kappa)=\kappa$; $exp_{n+1}(\kappa)=2^{exp_n(\kappa)}$. אז: $(exp_n(\kappa))^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$, בפרט $(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)^2_2$.

* $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2$ (אם $\{A,B\}$ חלוקה של $[\omega_1]^2$, לכל α גבולי נבחר $K_\alpha^{\in\alpha}$ הומ' המירבית עם $[K_\alpha\cup\{\alpha\}]^2 \subseteq B$. אם יש K_α אינסופית קיבלנו את $\omega+1$. אחרת ע"י Fodor יש הרבה α-ים שנותנים אותו K_α, S. ואז $[S]^2\subseteq A$.)

* כל α-עץ נורמלי איזומורפי לעץ של סדרות מאורך $<\alpha$ (עם הכלה). (הוכחה: באינד' על הרמה, ממירים איבר בסדרה (זמין))

* כל ω_1-עץ נורמלי עם ענף באורך $\aleph_1$ מכיל $\aleph_1$-אנטישרשרת: .

* עץ Aronszajn הוא מיוחד ⟺ הוא איחוד של $\aleph_0$ אנטי-שרשראות: (⇐) כל $T\supseteq f^{-1}\{q\}$ אנטי-שרשרת. (כאשר $f:T\to\mathbb{Q}$ שומרת סדר).
(⇒) אם $T=\bigcup_n A_n$ (a.ch.) מגדירים $f|_{A_n}$ באינד', $f|_{A_0}\equiv 0$; $f|_{A_1}\in\{-1,1\}$; וכו' כך שהסדר נשמר (ובכל שלב התמונה סופית).

* אם $2^{<\kappa}=\kappa$, אז יש 2^κ תת-ענפ' כמעט-זרות של κ (הענפים ב $\kappa\approx\{0,1\}^{<\kappa}$).

=מונים מדידים=

$\boxed{\text{מידה על } S}$ פירושו מידה שלמה על $P(S)$, $\mu\emptyset=0$, $\mu S=1$, רציפה, מונוטונית! σ-אדיטיבית.
$\boxed{\text{מידה על אלגברה } \mathcal{A}}$ = כנ"ל, אך רק על $\mathcal{A}$ (כך ש מידה על S = מידה על $P(S)$).

* אין מידה אינוריאנטית (שלמה) להזזה על $[0,1]$: קב' ויטלי אינה מדידה. **השאלה**: האם ניתן להרחיב את מידת לבג למידה שלמה (שאינה אינוריאנטית להזזה)?

μ $\boxed{\text{דו-ערכית}}$ אם לכל $X\subseteq S$, $\mu(X)\in\{0,1\}$. במקרה זה, $U=\{X\subseteq S:\mu X=1\}$ על-מסנן, σ-שלם (כי המידה σ-שלמה).
ולהיפך: כל על-מסנן σ-שלם מגדיר מידה דו-ערכית. $\mu X=1 \leftrightarrow X\in U$.
$A\subseteq S$ $\boxed{\text{אטום}}$ אם $\mu A>0$ ולכל $B\subset A$, $\mu B\in\{0,\mu A\}$. במקרה כזה, המידה המותנית על A $\frac{\mu(X\cap A)}{\mu(A)}$ דו-ערכית על A.

* במידה חסרת-אטומים, ניתן לפצל כל קב' חיובית לשתי קב' חיוביות זרות.

* **משפט Ulam**: אם יש מידה על S, אז: **או** שיש מידה דו-ערכית על S ! $|S|>$ מונה אי-נשיג. (הוכחה תגיע מההמשך)
או שיש מידה חסרת-אטומים על $2^{\aleph_0}$, ! $2^{\aleph_0}>$ מונה אי-נשיג חלש.

* על-מסנן (לא ראשי) על ω **אינו** σ-שלם: $\bigcap_n[n,\infty)=\emptyset$.

* אם κ המונה הראשון עם על-מסנן σ-שלם עליו, אז העל-מסנן הוא κ-שלם: נניח שיש חלוקה $\kappa=\bigcup_{\alpha<\mu}X_\alpha$, $\mu<\kappa$, $X_\alpha\notin U$. אז יש על-מסנן σ-שלם על μ (⚡):
נגדיר $f:\kappa\to\mu$, $x\mapsto\alpha$ אם $x\in X_\alpha$, אז $D=f(U)$ ($=\{Z\subseteq\mu: f^{-1}[Z]\in U\}$) על-מסנן לא-ראשי σ-שלם על μ //

κ $\boxed{\text{מדיד}}$ אם: יש על-מסנן (לא ראשי) κ-שלם על κ. (⇐ המונה הראשון עם מידה σ-אדיטיבית דו-ערכית הוא מדיד; והוא $>\aleph_0$).
κ-שלם + לא ראשי ← $[\kappa]^{<\kappa}\cap U=\emptyset$ (כל קב' קטנה היא איחוד $<\kappa$ יחידונים). ← κ רגולרי (אחרת איחוד של מעט קב' $\notin U$)

∴ * מדיד ← אי-נשיג: ראינו שרגולרי. נניח $\lambda<\kappa$, $\kappa\le 2^\lambda$. נניח $S\subseteq 2^\lambda$, $|S|=\kappa$; U על-מסנן κ-שלם על S; $X_\alpha=\{f\in S: f(\alpha)=\varepsilon_\alpha\}\in U$ ($\varepsilon_\alpha\in\{0,1\}$).
(הממוצע של S על α)
אז $\{g\}=\bigcap X_\alpha\in U$, ⚡.

$\boxed{\text{אידיאל } \sigma\text{-רווי}}$

$\boxed{I_\mu}$: האידיאל של קב' ממידה 0. σ-שלם; יחידונים $\in I_\mu$; כל אוסף קב' זרות $\notin I_\mu$ הוא בן-מניה.

* (1) κ הראשון עם מידה μ (σ-שלמה) ← I_μ κ-שלמה. (μ לאו דווקא דו-ערכית!)
(2) κ הראשון עם אידיאל I σ-שלם+σ-רווי ← I κ-שלם.

הוכחה: (1) דומה למקרה העל-מסנן: נניח $I_\mu\not\ni X=\bigcup_{\alpha<\lambda<\kappa}X_\alpha\in I_\mu$; $x\in X_\alpha$: $x\xmapsto{f}\alpha$. $f:X\to\lambda$ ⟸ $f(\mu)$ מידה על λ ⚡
(2) דומה, עם $J=f(I)$ אידיאל על λ. //

$\boxed{\sum_{i\in I} r_i} := \sup\{\sum_{i\in F} r_i : F\in[I]^{<\omega}\}$ (אם סופי, אז כל $r_i=0$ פרט לבן מנייה) μ $\boxed{\kappa\text{-אדיטיבית}}$ אם $\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda<\kappa}X_\alpha)=\sum_{\alpha<\lambda}\mu(X_\alpha)$.

* μ κ-אדיטיבית ⟺ I_μ κ-שלם. ((⇐) ברור. (⇒) בכל אוסף קב' זרות, כולן פרט לבן מנייה הן ממידה 0, ו-μ σ-אדיטיבית.)
∴ κ הראשון עם מידה μ (σ-שלמה) ← μ κ-שלמה.

κ $\boxed{\text{מדיד-ממשית}}$ אם יש מידה (לאו דווקא דו-ערכית) κ-שלמה על κ. (⇐ הראשון עם מידה σ-שלמה הוא מדיד-ממשית.)

* κ מדיד ממשית ← κ רגולרי (קב' מעוצמה $<\kappa$ הן ממידה 0, ומשתמשים ב κ-אדיטיביות שוב.)

* אם יש מידה לא-אטומית, אז יש מידה (ללא אטומים) על κ שהוא $\kappa\le c$. כללית: אם I σ-רווי+σ-שלם בלי אטומים (⟸ $I\restriction Z$ מקסימלי), אז יש כזה על $\kappa\le 2^{\aleph_0}$.
הוכחה: נניח μ לא-אטומית על S. בונים עץ בינארי של קב' זרות ממידה >0 על S (בגבול לוקחים חיתוכים, כל עוד המידה >0). σ-רווי ← זה Aronszajn
לכן יש $\kappa\le c$ ענפים. החיתוך של כל ענף הוא קב' ממידה 0, ומקבלים חלוקה של S ל-κ קב' ממידה 0, שמגדירה מידה $\nu(Z)=\mu(f^{-1}[Z])$ על κ
($f(x)=:\alpha$ כך ש $x\in$ איבר α של החלוקה). //

* ∴ μ מידה לא-אטומית על κ ← יש חלוקה של κ ל-$\le \mathfrak{c}$ קב' ממידה 0 ← μ לא $\mathfrak{c}^+$-אדיטיבית, לכן:
μ לא-אטומית + κ-שלמה ← $\mathfrak{c} \ge \kappa$. ⇐ κ מדיד ממשית ← κ מדיד (אם אטומית), או $\mathfrak{c} \ge \kappa$.

בדומה: אם יש אידיאל κ-שלם+ס-רווי על κ, אז κ מדיד, או $\mathfrak{c} \ge \kappa$.

משפט * אם יש מידה לא-אטומית μ, אז יש מידה (שלמה) המרחיבה את מידת לבג. (נניח μ על Z. בונים עץ בינרי בגובה ω של קב' מחולקות לשני קב' שווי מידה, ומקבלים מידה ν על 2^ω: $\nu(Z)=\mu(\bigcup\{X_f : f\in Z\})$ כאשר X_f = החיתוך המתאים לענף f. ν מסכימה עם מידת לבג על קב' בסיסיות (בפרט 2^ω) ולכן מרחיבה אותה).

=הוכחה של מדיד-ממשית ← אי-נשיג חלש=

$\boxed{\text{מטריצת Ulam}}$ של $\aleph_1 \times \aleph_0$ קב' $A_{\alpha,n} \subseteq \omega_1$ כך ש: בכל עמודה הקב' זרות בזוגות; $\omega_1 \setminus \bigcup_n A_{\alpha,n}$ ב"מ לכל שורה α.

* קיום מטריצת Ulam: לכל $\xi<\omega_1$ ניקח מניה f_ξ, ונגדיר $A_{\alpha,n}=\{\xi : f_\xi(n)=\alpha\}$. $A_{\alpha,n}$ זרה ל-$A_{\beta,n}$, ולכל α $(\alpha,\omega_1)\subseteq\bigcup_n A_{\alpha n}$.

* אין מידה על ω_1 (או אידיאל ס-שלם ס-רווי על ω_1): בכל שורה של מט' Ulam יש קב' ממידה >0, ולכן יש עמודה עם $\aleph_1$ קב' זרות ממידה >0, ↯.

* אם $\kappa=\lambda^+$ אז אין אידיאל κ-שלם κ-רווי על κ: (בונים מט' Ulam $\lambda\times\lambda^+$ כמו קודם, אז יש עמודה עם $\lambda^+=\kappa$ קב' זרות חיוביות, ↯
∴ κ מדיד ממשית ← κ אי-נשיג חלש.

הוכחת משפט Ulam: אם יש מידה על S, אז: או שיש אטום $A\subseteq S$ ומקבלים מידה דו-ערכית על A ולכן על S, ואז $|S| \ge$ המדיד הראשון, שהוא אי-נשיג;
או שאין אטום ומקבלים מידה על $\kappa\le\mathfrak{c}$ וממנה מידה על $\mathfrak{c}$, ו-κ מדיד ממשית ← אי-נשיג חלש.

$(f_\alpha : \alpha<\kappa)$ $\boxed{\kappa\text{-סקלה}}$ אם: $\alpha<\beta$ ← $f_\alpha <^* f_\beta$, ושולית.

* אם יש κ-סקלה, אז κ אינו מדיד-ממשית: ונגדיר $A_{n,k}=\{\alpha : f_\alpha(n)=k\}$ ← $\bigcup_k A_{n,k}=\kappa$, ניקח לכל n $g(n)=k$ עבורו $\mu\left(\bigcup_{l=k}^{\infty} A_{n,l}\right)<\frac{1}{2^{n+2}}$
$\mu\left(\bigcup_n \bigcup_{l=g(n)}^{\infty} A_{n,l}\right) \le \frac{1}{2}$, לכן יש κ α-ים שאינם בקבוצה, כ"א $g > f_\alpha$ מנק' (ונוגלית של α-ים, ↯.

∴ אם $\mathfrak{b}=\mathfrak{d}$, אז $\mathfrak{b}$ אינו מדיד-ממשית.

דרך עיון: ניקח משפחה $\mathcal{F}\subseteq\omega^\omega$ כך שלכל $g\in\omega^\omega$, $|\{f\in\mathcal{F} : f<g\}|<|\mathcal{F}|$. אז לפי הוכחה אחרונה, $|\mathcal{F}|$ אינו מדיד-ממשית. בפרט, $\mathfrak{b}$ ו-$\mathfrak{d}$ אינם מדידים ממשית.
*זה נכון: Fremlin ב-I MCPG מביא הוכחה דומה, ומקבל למשל שלכל $\mathcal{F}$, $cf(cf(\omega^\omega/\mathcal{F}))$ אינו מדיד-ממשית (בפרט, $cf(\mathfrak{d})$) ועוד תוצאות עלמונות של הרצל?