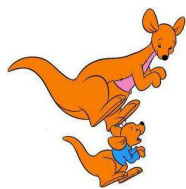


מספרים וצבעים

קורס בתורת רמזי



529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 55

ללא

הקדמה

ספר זה מכסה את רוב המשפטים החשובים ביותר על צביעות של מבנים אלגבריים, בצורה נגישה וכמעט בלי להסתמך על ידע מתמטי קודם. המטרה בכתיבת הספר היתה לקבל "ממוצע הרמוני" בין הספרון האלגנטי של איגור פרוטסוב, שהיקפו מוגבל, ליצירה האנציקלופדית של הינדמן ושטראוס, שנוטה לפירוט ולהכללות מרחיקות לכת ככל האפשר. הספר הנוכחי מתאים הן לקריאה עצמית והן לקורס בנושא, ויכול לשמש כנקודת מוצא למחקר בתחום.

מאמץ רב הושקע בנסיון לפשט הוכחות וסימונים מהספרים הנזכרים. מבחינת ההיקף, ההבדל העיקרי ביחס לספרו של פרוטסוב הוא כיסוי משפט הקבוצה המרכזית של פורסטנברג, ובעקבותיו המשפט על תמונות מונוכרומטיות של מטריצות ומשפט ראדו על פתרונות מונו-כרומטיים של מערכת משוואות לינאריות דיאופנטיות. ייתכן שכמה מהתוצאות או ההוכחות בספר הן חדשות לגמרי, אולם אלה מקרים חריגים. בקורס שנתתי בבר-אילן, כיסיתי גם את משפט רוט ואת הנושא של דינמיקה טופולוגית. ב"ה, אוסיף פרקים אלה בעתיד, ואולי עוד פרקים אחרים. כיון שצפויות מהדורות נוספות, כדאי לבקר מדי פעם באתר הספר ולהתעדכן.

כאמור, נעשה מאמץ להנגיש את הספר לקהל גדול ככל האפשר. עקרונית, כל בוגר סמסטר ראשון של שנה א' לתואר ראשון במתמטיקה, פיסיקה, או מדעי המחשב יכול לקרוא את הספר, פרט אולי לפסקאות בודדות שעליהן יוכל לדלג מבלי לפגוע בהמשך. לכן, כמעט כל קורא ימצא בספר קטעים הידועים לו מלימודים קודמים. במקרים אלה, הקורא יכול לדלג לסעיף הבא, ולחזור לסעיף עליו דילג אם צצה אי-בהירות כלשהי בהמשך.

לגבי התרגילים: אפשר לקרוא את הספר בלי לפתור, אולם הם מסייעים מאד להבין את החומר ולקבל תחושה טובה של הטכניקות הבסיסיות. מאד מומלץ להשקיע לפחות מעט מחשבה בכל אחד מהם.

במקרים בודדים, מופיע בספר מינוח ללא הגדרה. מינוחים אלה אינם מרכזיים להמשך הספר, ומצד שני קיים עבורם ערך טוב בויקיפדיה. הקורא מוזמן לאתרם שם.

בספר משובצים גם מספר טיולים. אלה פרקים שאינם הכרחיים להמשך הספר, אך הם מאירים צדדים מעניינים נוספים בנושא הנלמד, ויכולים לשמש גם כהפסקות התרענונות. גם אדם שמבלה כל ימיו בשדה צבעונים עשוי לשמוח לראות, מדי פעם, גם פרחים מסוגים אחרים.

השערות טבעיות רבות שאינן מוכחות בספר הנוכחי, אינן נכונות. לרובן ניתן למצוא דוגמאות נגדיות בספר של הינדמן ושטראוס.

תודה לתלמידים המצויינים שלקחו את הקורסים שמהם צמח ספר זה. למדתי מהם הרבה, והאינטראקציה אתם נתנה את חותמה על ספר זה. תודה לאכסניות שבהן ניתן הקורס: מכון ויצמן למדע (תשס"ח) ואוניברסיטת בר-אילן (תשע"א). תודה לכל מי שהעיר הערות והציע תיקונים לספר זה. שמותיהם מופיעים באתר הספר. אנצל הזדמנות זו לבקש מכל מי שמוצא שגיאה, או שיש לו הצעה לשיפור, לדווח לי באימייל שלהלן. אשתדל לעדכן את אתר הקורס כך שיכלול את שמותיהם של כל מי שיתרמו הערות מועילות.

תודה למורי, הילל פורסטנברג, שהיה הראשון ללמדני תורה זו. תודה לליובומיר זדומסקי, שקנה לי את ספרו של פרוטסוב כמתנת סיום לפוסט-דוקטורט שלו, ותודה לאיגור פרוטסוב על שכתב ספר זה, שהצית מחדש את העניין שלי בתחום. תודה לניל הינדמן, יבגני זלניוק, ואיגור פרוטסוב על השיחות המחכימות בנושאי הספר.

תודה לילדיי היקרים: ידידה צוריאל, אברהם, מיכאל, אסתר, ואליה, שויתרו קצת (ליתר דיוק: הרבה) על אבא, כדי שניתן יהיה להשלים את המלאכה (כלומר, השלמת המלאכה שנעשתה עד כה, וזו שתיעשה, ב"ה). תודה לאל, שנתן לנו את השבת - בלעדיה ייתכן שהם לא היו מזהים אותי היום.

תודתי העמוקה נתונה לאשתי, לאה, על הגיבוי והמסירות לאורך כל הדרך. ספר זה, על כל מהדורותיו העתידיות, מוקדש לה באהבה.

בועז צבאן, אוניברסיטת בר-אילן, תשע"א.

tsaban@math.biu.ac.il

תוכן עניינים

1	משפטי צביעה בסיסיים	1
1	1.1 משפט רמזי	
3	1.2 משפט הקומפקטיות, משפט ארבעת הצבעים, ומשפט רמזי הסופי	
5	1.3 המשפט האחרון של פרמה ומשפט שור	
7	2 על-מסננים, טופולוגיה וקומפקטיות	2
7	2.1 מסננים ועל-מסננים	
10	2.2 טיול: הוכחה של משפט רמזי בעזרת על-מסנן	
11	2.3 מרחבים טופולוגיים	
12	2.4 מרחבים קומפקטיים	
14	2.5 טיול: משפט טיכונוף ומשפט קומפקטיות מוכלל עבור צביעות	
18	3 הקומפקטיפיקציה של סטון-צ'ך	3
18	3.1 מרחב העל-מסננים	
19	3.2 טיול: מקורן של הקבוצות הפתוחות ב βX	
20	3.3 משפט ההרחבה	
22	3.4 הוספת מבנה אלגברי	
23	3.5 אידמפוטנטים	
24	3.6 איפיון קומבינטורי של פעולת הכפל של βS	
26	4 משפט הסכומים הסופיים של הינדמן	4
26	4.1 משפט הינדמן	
28	4.2 הכללה של משפט הינדמן	
30	4.3 קבוצות FP וצביעות שלהן	
32	4.4 משפט על פתרונות של מערכות אי-שיוויינים פולינומיים	
35	5 משפט ואן דר ווארדן	5
35	5.1 אידיאלים בסמיחבורות	
37	5.2 משפט ואן דר ווארדן	
41	6 משפט היילס-ג'ואט	6
41	6.1 צביעות של הסמיחבורה החופשית	
42	6.2 משפט גלאי	
44	6.3 משפט גרהם-ליב-רוטשילד על מרחבים אפיניים מונוכרומטיים	
45	6.4 משחק איקס-עיגול רב מימדי	
47	6.5 טיול: המשחק "שווה מרחק"	
49	7 משוואות הומוגניות, משפט הקבוצה המרכזית, ותמונות	7

49	קבוצות של טבעיים בעלות מבנה קומבינטורי	7.1
51	משפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין	7.2
54	משפט ראדו: פתרון מונוכרומטי למשוואה הומוגנית	7.3
56	משפט הקבוצה המרכזית של פורסטנברג	7.4
58	תמונות מונוכרומטיות	7.5
63	משפט ראדו עבור מערכות של משוואות	7.6
65	קבוצות גדולות וצביעות של חברות	8
65	קבוצת ההפרשים של קבוצה	8.1
66	משפט ניומן	8.2
67	קבוצות ענקיות	8.3
69	משפט פרוטסוב	8.4

1 משפטי צביעה בסיסיים

תורת רמזי, הקרויה על שם פרנק פ. רמזי (Ramsey), עוסקת בתופעה הבאה: אם ניקח מבנה מתמטי עשיר, ונצבע כל אחד מאיבריו בצבע אחד (מתוך מספר סופי נתון של צבעים) בכל צורה שהיא, נוכל למצוא בתוכו תת-מבנה עשיר (אולי מבחינה אחרת), שלכל איבריו אותו צבע.

בפרק זה נוכיח, בצורה אלמנטרית, כמה משפטים מרכזיים ויפים ביותר המדגימים תופעה זו. נתחיל עם המשפט שממנו קיבל התחום את שמו.

1.1 משפט רמזי

עבור קבוצה A , ומספר טבעי d , נסמן $[A]^d = \{F \subseteq A : |F| = d\}$.

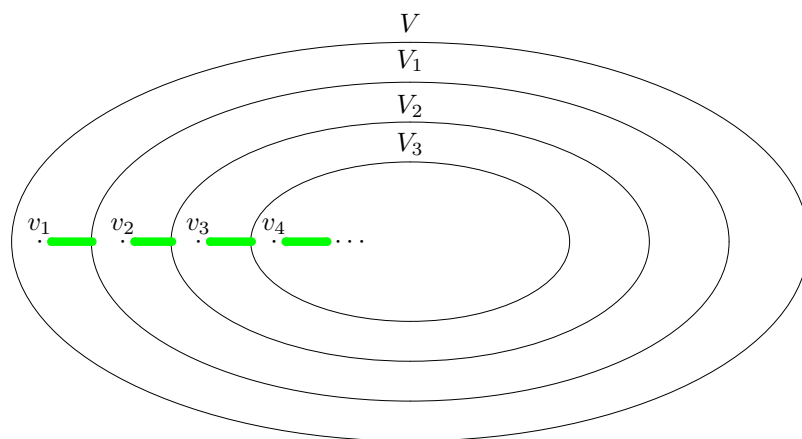
גרף $G = (V, E)$ מוגדר על ידי קבוצה של קודקודים V וקבוצה E של צלעות בין קודקודים. $E \subseteq [V]^2$, כאשר $\{a, b\} \in E$ פירושו שיש צלע בין a ל- b . אם $E = [V]^2$, כלומר בין כל שני קודקודים יש צלע, אומרים שהגרף שלם.

משפט 1.1 (רמזי) לכל גרף שלם אינסופי, אם נצבע כל אחת מצלעותיו באחד מבין מספר סופי נתון של צבעים, אז הגרף יכיל תת-גרף אינסופי שלם מונוכרומטי, כלומר, שכל צלעותיו באותו הצבע.

הוכחה: ההוכחה שניתן היא הוכחתו המקורית של רמזי. למרות שמאז ניתנו הוכחות נוספות רבות, הוכחתו של רמזי נשארת ההוכחה הבהירה ביותר.

נוכיח את הטענה עבור שני צבעים, ולאחר ההוכחה נדריך את הקורא כיצד להוכיח את המשפט למספר צבעים כלשהו. נניח איפוא כי הצבעים הם ירוק ואדום. נזכור שהגרף שלם, כך שכל שני קודקודים מחוברים בצלע (ירוקה או אדומה). נבחר קודקוד $v_1 \in V$. או שיוצאות ממנו אינסוף צלעות ירוקות, או שיוצאות ממנו אינסוף צלעות אדומות. בלי הגבלת הכלליות, נניח ירוקות. תהי V_1 קבוצת הקודקודים אליהם מובילות צלעות ירוקות אלה.

המקרה הטוב:

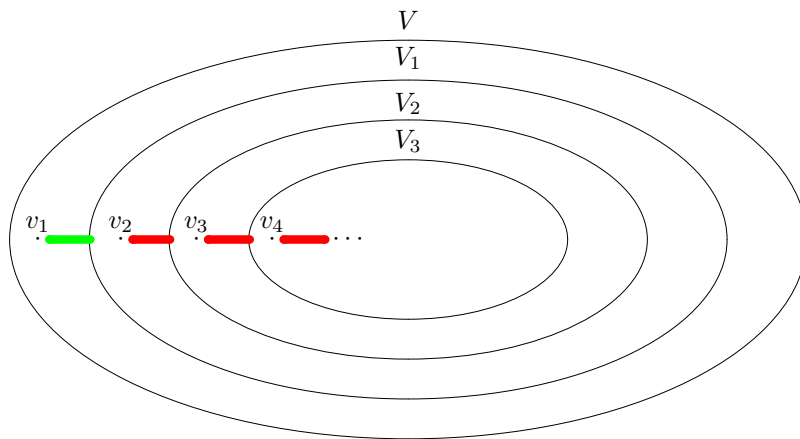


נניח שיש $v_2 \in V_1$, שיוצאות ממנו אינסוף צלעות ירוקות לאיברים אחרים ב- V_1 . תהי $V_2 \subseteq V_1$ קבוצת הקודקודים שאליהם מובילות צלעות ירוקות אלה.

נמשיך באינדוקציה, כל עוד אפשר: לכל $n > 1$, נניח שיש $v_{n+1} \in V_n$ שיוצאות ממנו אינסוף צלעות ירוקות לאיברים אחרים ב V_n . תהי $V_{n+1} \subseteq V_n$ קבוצת הקודקודים שאליהם מובילות צלעות ירוקות אלה.

אם התהליך אפשרי לכל n , אז הגרף השלם על קבוצת הקודקודים $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ כולו ירוק: לכל $n < m$, $v_m \in V_n$ ולכן הצבע של הצלע $\{v_n, v_m\}$ הוא ירוק. במקרה זה, ההוכחה נשלמה.

המקרה הנותר (עוד יותר טוב):



נניח שיש n כך שהתהליך שבמקרה הקודם נתקע, כלומר: לכל $v \in V_n$, יש רק מספר סופי של צלעות ירוקות ממנו. אז נתחיל מכאן את אותו תהליך, הפעם עם צלעות אדומות במקום ירוקות. כעת התהליך לא יכול להתקע, כי לכל $m \geq n$, ולכל $v_{m+1} \in V_m$, כל הצלעות, פרט למספר סופי, מ v_{m+1} לשאר אברי V_m הן אדומות!

לכן, במקרה הנותר, נקבל קודקודים $v_{n+1}, v_{n+2}, \dots$ כך שהגרף השלם עליהם כולו אדום. ■

מוסכמה. במקום שנוח, נזהה כל צבע עם מספר טבעי. למשל, צביעה של אברי קבוצה A בצבעים כחול, ירוק ואדום היא פונקציה $\{ \text{כחול, ירוק, אדום} \} : A \rightarrow c$, ואפשר לחשוב במקום זאת על פונקציה $\{1, 2, 3\} : A \rightarrow c$. כמו כן, קבוצה שלכל איבריה אותו צבע תיקרא מונוכרומטית.

תרגיל 1. הוכח את משפט רמזי עבור k צבעים, k כלשהו, בעזרת טיעון עיוורון הצבעים: אם הצבעים הם $\{1, \dots, k\}$, נגדיר צביעה חדשה על ידי החלפת כל צבע מבין $2, \dots, k$ בצבע 2, ונפעיל את המשפט שהוכח.

למשפט רמזי יש גרסה כללית יותר. נשים לב שאפשר להניח במשפט הקודם ש $V = \mathbb{N}$: אפשר להתמקד בתת-גרף בן מניה של הגרף האינסופי הנתון, ולמספר את קודקודיו בעזרת המספרים הטבעיים.

משפט 1.2 (רמזי) יהי d מספר טבעי. לכל צביעה של אברי $[\mathbb{N}]^d$ במספר סופי של צבעים, יש $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית כך ש $[A]^d$ מונוכרומטית.

תרגיל 2. הוכח את משפט רמזי הכללי.

הזכרה: באינדוקציה על d . $d = 1$ מידי, ועבור $d > 1$, בהנתן צביעה

$$c : [\mathbb{N}]^d \rightarrow \{1, \dots, k\}$$

נבחר $v_1 \in \mathbb{N}$ ונתבונן בצביעה $c_{v_1} : [\mathbb{N} \setminus \{v_1\}]^{d-1} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ המוגדרת

$$c_{v_1}(\{v_2, \dots, v_d\}) = c(\{v_1, v_2, \dots, v_d\})$$

מהנחת האינדוקציה, יש $V_1 \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית כך ש $[V_1]^{d-1}$ מונוכרומטית עבור הצביעה c_{v_1} .

תרגיל 3: תהי A קבוצה אינסופית של נקודות במישור, כך שכל ישר מכיל לכל היותר מספר סופי של נקודות מ A . הוכח שיש $B \subseteq A$ אינסופית, כך שכל ישר מכיל לכל היותר שתי נקודות מ B .

1.2 משפט הקומפקטיות, משפט ארבעת הצבעים, ומשפט רמזי הסופי

לכל אחד ממשפטי הצביעה שנוכח בקורס יש גם גרסה שבה צובעים קבוצה סופית (בתנאי שהיא גדולה מספיק). הגרסאות הסופיות נובעות מאלה האינסופיות, בעזרת המשפט הבא.

משפט 1.3 (קומפקטיות) תהי $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ קבוצה בת מניה, ותהי A משפחה של תת-קבוצות סופיות של X . נניח שלכל צביעה של $x_1, x_2, \dots$ ב k צבעים, יש ב A קבוצה מונוכרומטית. אזי יש מספר טבעי n , כך שלכל צביעה של $x_1, \dots, x_n$ ב k צבעים, יש תת-קבוצה מונוכרומטית של $\{x_1, \dots, x_n\}$ השייכת ל A .

הוכחה: נניח בשלילה, שלכל n יש צביעה c_n של $x_1, \dots, x_n$ ב k צבעים, כך שאין קבוצה מונוכרומטית ב A עבור צביעה זו. נגדיר צביעה של $x_1, x_2, \dots$ בצורה הבאה:

נבחר צבע i_1 כך שהקבוצה $I_1 = \{n \in \mathbb{N} : c_n(x_1) = i_1\}$ אינסופית.

נבחר צבע i_2 כך שהקבוצה $I_2 = \{n \in I_1 : n \geq 2, c_n(x_2) = i_2\}$ אינסופית.

באינדוקציה, נבחר לכל $m > 1$ צבע i_m כך שהקבוצה

$$I_m = \{n \in I_{m-1} : n \geq m, c_n(x_m) = i_m\}$$

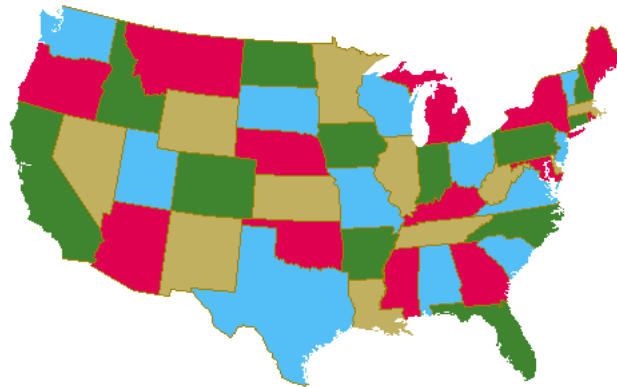
אינסופית.

נגדיר צביעה c של $x_1, x_2, \dots$ על ידי $c(x_m) = i_m$ לכל $m \in \mathbb{N}$. מהנחת המשפט, יש קבוצה $F \in \mathcal{A}$ מונוכרומטית עבור c . כיון ש F סופית, יש m כך ש $F \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$. נקבע $n \in I_m$. לכל $j = 1, \dots, m$, מתקיים $c_n(x_j) = i_j = c(x_j)$. לכן, F מונוכרומטית עבור c_n . סתירה. ■

נראה יישום קל ומעניין של משפט הקומפקטיות. נניח שלפנינו מפה מדינית (אמיתית או דמיונית), ואנו מעוניינים לצבוע כל מדינה בצבע, כך ששתי מדינות שכנות בעלות גבול משותף (של ממש, כלומר הגבול הוא יותר מנקודה בודדת) יקבלו צבעים שונים. ישנן כמה דרישות פורמליות מהמפה, כגון שאפשר לשכן אותה במישור, וששטחי המדינות הם "רציפים", אולם נסתפק כאן בהבנה האינטואיטיבית. מהו מספר הצבעים המינימלי הדרוש לצביעת המפה? הלוגו של הדפדפן Google Chrome (בגירסתו המישורית) הוא דוגמא למפה בת 4 מדינות, שלא ניתן לצבוע בפחות מארבע צבעים:



אבל אפילו למפה של מדינות ארה"ב מספיקים 4 צבעים:



(רק פי 4 ממספר הצבעים הדרוש למפה של ישראל!). ההשערה, שארבעה צבעים מספיקים לכל מפה, נוסחה באמצע המאה ה-19 והוכחה ב-1976, על ידי צמצום השאלה לפחות מאלפיים מקרים ובדיקת כולם בעזרת מחשב. עד היום לא נמצאה הוכחה שאפשר להסביר בלי לעבור על מאות מקרים. לכן, לא נוכיח משפט זה כאן. לעומת זאת, מבלי לדעת דבר על הוכחתו, נוכל להסיק ממנו בקלות את גרסתו האינסופית.

משפט 1.4 (משפט ארבעת הצבעים האינסופי) ניתן לצבוע כל מפה מדינית אינסופית בארבעה צבעים, כך שכל שתי מדינות בעלות גבול משותף נצבעות בצבע שונה.

הוכחה: ראשית, נשים לב שכמות המדינות בכל מפה מדינית היא בת מניה. אכן, נחשוב על המפה כמצוירת על המישור $\mathbb{R}^2$. לכל מדינה, אפשר לבחור נקודה (q_1, q_2) בתוכה, כך ש q_1, q_2 שניהם רציונליים. למדינות שונות מתקבלים זוגות שונים, ולכן מספר המדינות אינו גדול יותר מ $\mathbb{Q}^2$, שהיא קבוצה בת מניה.

תהי $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ קבוצת המדינות במפה. תהי $\mathcal{A}$ קבוצת הזוגות של מדינות שכנות, כלומר $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{A}$ אם ורק אם x_i, x_j בעלות גבול משותף. נניח בשלילה, שלכל צביעה של המדינות (אברי X), יהיו מדינות עם גבול משותף שקיבלו אותו צבע, כלומר יש $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{A}$ מונוכרומטית. ממשפט הקומפקטיות, יש n כך שלכל צביעה של $x_1, \dots, x_n$ בארבעה צבעים, יש $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{A}$ מונוכרומטית. אבל זה סותר את משפט ארבעת הצבעים הסופי. ■

כעת נוכיח וריאציה סופית של משפט רמזי. במקרה $d = 2$, המשפט הבא אומר שלכל צביעה של הגרף השלם בעל n קודקודים, יש תת-גרף שלם מונוכרומטי בעל m קודקודים.

משפט 1.5 (משפט רמזי הסופי) יהיו k, m, d מספרים טבעיים. יש n טבעי, כך שלכל צביעה של אברי $[1, \dots, n]^d$ ב k צבעים, יש $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ כך ש $|A| = m$, ולכל אברי $[A]^d$ אותו צבע.

הוכחה: נכתוב $[\mathbb{N}]^d = \{x_1, x_2, \dots\}$.

תהי $\mathcal{A} = \{[A]^d : A \subseteq \mathbb{N}, |A| = m\}$. כל איבר של $\mathcal{A}$ הוא תת-קבוצה סופית (ליתר דיוק, בגודל $\binom{m}{d}$) של $\{x_1, x_2, \dots\}$. משפט רמזי אומר, שלכל צביעה של $x_1, x_2, \dots$ יש $B \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית, כך שלכל אברי $[B]^d$ אותו צבע. בפרט, אם נקבע $A \subseteq B$ כך ש $|A| = m$, נקבל ש $[A]^d \in \mathcal{A}$ ומונוכרומטית.

ממשפט הקומפקטיות, יש N טבעי כך שלכל צביעה של $x_1, \dots, x_N$ יש ב $\mathcal{A}$ תת-קבוצה מונוכרומטית של $\{x_1, \dots, x_N\}$. יהי n האיבר הגדול ביותר המופיע באיזשהו x_i , פורמלית: $n = \max \bigcup_{i=1}^N x_i$. אז $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq [\{1, \dots, n\}]^d$, ולכן לכל צביעה של אברי $[\{1, \dots, n\}]^d$ (שהיא בפרט צביעה של $x_1, \dots, x_N$) יש $F \in \mathcal{A}$ מונוכרומטית עבורה, כלומר: $F = [A]^d \subseteq [\{1, \dots, n\}]^d$ (ממילא, $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|A| = m$), ו $[A]^d$ מונוכרומטית. ■

למשפט רמזי יישומים רבים בענפי המתמטיקה ומדעי המחשב התיאורטיים. נראה כאן שימוש יפהפה לתורת המספרים.

1.3 המשפט האחרון של פרמה ומשפט שור

המשפט האחרון של פרמה (Fermat) אומר כי, בניגוד למקרה $n = 2$ ממשפט פיתגורס, עבור $n > 2$ אין פתרון למשוואה

$$x^n + y^n = z^n$$

כאשר $x, y, z \in \mathbb{N}$.

טענה זו נוסחה על ידי פרמה בלי הוכחה, והפכה למשפט רק לאחר דורות רבים של נסיונות. דרך החתחתים להוכחה העמוקה של משפט זה הפכה לנושא של ספר רב מכר.

לפני שהוכח משפט זה, בחן המתמטיקאי שור (Schur) את השאלה, האם יש פתרונות למשוואה של פרמה מזולו מספר ראשוני. ייתכן ששור סבר, שעבור ראשוני מספיק גדול התשובה לשאלתו תשפוך אור על משפט פרמה. העבודה עם ראשוני מספיק גדול (אחרי שקובעים את n) גם מסירה את המכשול הטריטוריאלי הבא.

תרגיל 4. לכל מספר ראשוני p , יש n כך שלמשוואה $x^n + y^n = z^n \pmod{p}$ אין פתרון $x, y, z \not\equiv 0 \pmod{p}$.

הדרכה: המשפט הקטן של פרמה (עיין בויקיפדיה).

משפט 1.6 (שור) לכל ראשוני מספיק גדול p , יש פתרון למשוואה $x^n + y^n = z^n \pmod{p}$.

הוכחת משפט זה משתמשת במשפט צביעה מעניין בפני עצמו.

משפט 1.7 (משפט הצביעה של שור) לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, קיימים טבעיים x, y, z באותו צבע, כך ש $x + y = z$. במילים אחרות, יש פתרון מונוכרומטי למשוואה $x + y = z$.

הוכחה: תהי נתונה צביעה $c : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, k\}$. נגדיר צביעה $\chi : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{1, \dots, k\}$ על ידי

$$\chi(\{i, j\}) = c(j - i)$$

לכל $i < j$ טבעיים. ממשפט רמזי, יש $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית כך ש χ צובעת את כל אברי $[A]^2$ באותו צבע. יהיו $i, j, r \in A$ כך ש $i < j < r$. מהגדרת χ , $c(j-i) = c(r-j) = c(r-i)$, וקיבלנו מונוכרומטי

$$\underbrace{r-j}_x + \underbrace{j-i}_y = \underbrace{r-i}_z$$

■

תרגיל 5: הראה שמההוכחה של משפט הצביעה של שור נובע, שיש אינסוף שלשות זרות $\{x, y, z\}$ מונוכרומטיות, כך ש $x + y = z$.

מסקנה 1.8 לכל מספר צבעים k , קיים n כך שלכל צביעה של $1, \dots, n$ ב k צבעים, יש $x, y, z \in \{1, \dots, n\}$ מאותו צבע, כך ש $x + y = z$.

תרגיל 6. הוכח מסקנה זו, בעזרת משפט הקומפקטיות.

הוכחה: הוכחת משפט שור על השערת פרמה מודולו ראשוני: $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, עם חיבור וכפל מודולו p , שדה סופי. ממשפט בתורת השדות (שלא יוכח כאן), יש $0 \neq g \in \mathbb{Z}_p$ כך ש $\{g, g^2, \dots, g^{p-1}\} = \mathbb{Z}_p^* := \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

נגדיר צביעה של $\{1, \dots, p-1\}$ בצורה הבאה: לכל $r \in \{1, \dots, p-1\}$, יש חזקה יחידה $1 \leq m \leq p-1$ כך ש $g^m = r$. נגדיר $c(r) = m \bmod n$.

מהגירסה הסופית של משפט הצביעה של שור, אם p מספיק גדול, אז יש $x, y, z \in \{1, \dots, p-1\}$ מאותו צבע i , כך ש $x + y = z$. נכתוב

$$x = g^{nt_1+i}, y = g^{nt_2+i}, z = g^{nt_3+i}$$

ונקבל

$$g^{nt_1+i} + g^{nt_2+i} = g^{nt_3+i}$$

כאשר החזקות הן ב $\mathbb{Z}_p^*$. בפרט, זה נכון ב $\mathbb{Z}_p$, ונמשיך את חישובינו בשדה זה. נכפול את שני האגפים ב g^{-i} , לקבל

$$\underbrace{(g^{t_1})^n}_x + \underbrace{(g^{t_2})^n}_y = \underbrace{(g^{t_3})^n}_z$$

■

קיבלנו איפוא $x, y, z \in \mathbb{Z}_p^*$ כך ש $x^n + y^n = z^n \pmod{p}$.

הערה: כיון שהחבורה הכפלית של כל שדה סופי היא ציקלית, ההוכחה האחרונה מראה שלכל n , ולכל שדה סופי מספיק גדול $\mathbb{F}$, יש ב $\mathbb{F}$ פתרון למשוואה $x^n + y^n = z^n$, כך ש $x, y, z \neq 0$.

את התרגילים הבאים ניתן לפתור בעזרת עדכונים קלים של הוכחת משפט שור.

תרגיל 7. יהי n טבעי. הוכח שלכל ראשוני מספיק גדול p , יש פתרון למשוואה $x^n + y^n + z^n = w^n \pmod{p}$, כך ש $x, y, z, w \neq 0 \pmod{p}$.

תרגיל 8. תהי G חבורה עם לפחות 6 איברים. הוכח שלכל צביעה של אברי G בשני צבעים, יש איברים $a, b, c \in G$ שונים מאיבר היחידה, כך ש $ab = c$ ולשלשתם אותו צבע.

בהמשך הספר, נוכיח משפטי צביעה שאין להם הוכחה אלמנטרית פשוטה. נשתמש בשיטה המשלבת טופולוגיה ואלגברה. בפרק הבא נבנה את היסודות לשיטה זו. קורא שכבר נתקל ביסודות אלה, די לו לרפרף על הפרק בקלילות, ולעבור לפרק שאחריו.

2 על-מסננים, טופולוגיה וקומפקטיות

2.1 מסננים ועל-מסננים

עבור קבוצה X , $P(X) = \{B : B \subseteq X\}$, משפחת התת-קבוצות של X . נתעניין במסננים, משפחות אשר, מבחינה אינטואיטיבית, מכילות רק תת-קבוצות "גדולות". זוהי המוטיבציה להגדרה הבאה.

הגדרה 2.1 מסנן (*filter*) על קבוצה X הוא משפחה $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ המקיימת, לכל $A, B \subseteq X$:

$$1. \emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$$

$$2. \text{ אם } A \in \mathcal{F}, B \supseteq A \text{ אז } B \in \mathcal{F}$$

$$3. \text{ אם } A, B \in \mathcal{F} \text{ אז } A \cap B \in \mathcal{F}$$

באינדוקציה, לכל $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, גם $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$. כמו כן, בשל התכונה השנייה, אפשר לנסח את התכונה הראשונה גם כ $\mathcal{F} \neq \emptyset, P(X)$.

דוגמא: לכל $x \in X$, נגדיר את המסנן הראשי $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$. זהו מסנן "דיקטטורה", במובן שההחלטה האם קבוצה היא גדולה או לא נקבעת רק על ידי x .

דוגמא: קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קו־סופית (ב X) אם המשלים שלה, $A^c = X \setminus A$, סופי. תהי X קבוצה אינסופית. המשפחה $\mathcal{F}$ של כל הקבוצות הקו־סופיות ב X היא מסנן, שנקרא המסנן של פרשה (Fréchet).

למה 2.2 תהי $\mathcal{A}$ משפחה לא ריקה של תת-קבוצות של X , כך שהחיתוך של כל מספר סופי של איברים של $\mathcal{A}$ אינו ריק. אזי הסגור של $\mathcal{A}$ כלפי חיתוכים סופיים וכלפי מעלה,

$$\langle \mathcal{A} \rangle := \{B : \exists A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}, A_1 \cap \dots \cap A_k \subseteq B\}$$

הוא מסנן. זהו המסנן הקטן ביותר המכיל את $\mathcal{A}$. נקרא למסנן זה המסנן הנוצר על ידי $\mathcal{A}$.

הוכחה: קל לראות שהמשפחה $\langle \mathcal{A} \rangle$ מקיימת את כל התכונות של מסנן. כמו כן, כל מסנן המכיל את $\mathcal{A}$ חייב להכיל כל חיתוך סופי של אברי $\mathcal{A}$ ולכן גם כל קבוצה שמכילה חיתוך סופי כזה. ■

הגדרה 2.3 מסנן $\mathcal{F}$ על X נקרא על-מסנן (*ultrafilter*) אם לכל $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ או $A^c \in \mathcal{F}$.

דוגמא: לכל $x \in X$, המסנן הראשי $\mathcal{F}_x$ הוא על-מסנן.

תרגיל 1: אם X סופית, אז כל על-מסנן על X הוא מהצורה $\mathcal{F}_x$ לאיזהו $x \in X$. יתר על כן, אם $\mathcal{F}$ על-מסנן על קבוצה X כלשהי (סופית או אינסופית) ויש ב $\mathcal{F}$ איבר סופי, אז $\mathcal{F}$ הוא מהצורה $\mathcal{F}_x$ לאיזהו $x \in X$.

נאנחנו נעסוק רק במקרה ש X אינסופית.

דוגמא: המסנן של פרשה על קבוצה אינסופית X אינו על-מסנן, כיון שאפשר לחלק את X לשתי קבוצות אינסופיות זרות, ואף אחת מהן אינה במסנן זה.

תרגיל 2: יהי $\mathcal{F}$ על-מסנן על X .

1. אם $A \cup B \in \mathcal{F}$, אז $A \in \mathcal{F}$ או $B \in \mathcal{F}$.

2. אם $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}$, אז יש $i \leq n$ כך ש $A_i \in \mathcal{F}$.

מכאן הקשר של על-מסננים למשפטי צביעה.

מסקנה 2.4 יהי $\mathcal{F}$ על-מסנן. לכל $A \in \mathcal{F}$ ולכל צביעה של אברי A במספר סופי של צבעים, יש ב $\mathcal{F}$ קבוצה מונוכרומטית.

הוכחה: תהי $c: A \rightarrow \{1, \dots, k\}$ צביעה. לכל $i \in \{1, \dots, k\}$ תהי $A_i = c^{-1}(i)$, קבוצת אברי A שנצבעו בצבע i . אז

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = A \in \mathcal{F}$$

מהתרגיל, יש i כך ש $A_i \in \mathcal{F}$.

נוכיח שיש על-מסננים לא ראשיים, בעזרת הלמה של צורן (Zorn).

הגדרה 2.5 קבוצה P היא סדורה חלקית, אם מוגדר עליה יחס $\leq$, כך שלכל $x, y, z \in P$ מתקיים:

1. רפלקסיבי: $x \leq x$.

2. טרנזיטיבי: אם $x \leq y \leq z$, אז $x \leq z$.

3. אנטי-סימטרי: אם $x \leq y \leq x$, אז $x = y$.

שרשרת בקבוצה סדורה חלקית P היא קבוצה $A \subseteq P$ כך שלכל $a, b \in A$, $a \leq b$ או $b \leq a$.
חסם מלעיל של קבוצה $A \subseteq P$ הוא איבר $p \in P$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $a \leq p$.
איבר $p \in P$ הוא מקסימלי אם אין ב P איבר x כך ש $p < x$.

משפט 2.6 (הלמה של צורן) תהי P קבוצה סדורה חלקית לא ריקה, כך שלכל שרשרת ב P יש חסם מלעיל. אזי יש ב P איבר מקסימלי.

הלמה של צורן, שנובעת (בצורה לא טריויאלית) מאקסיומת הבחירה, היא בסיסית מאוד במתמטיקה. על ידי שימוש בסדר החלקי ההפוך, נובע גם שלכל קבוצה סדורה חלקית לא ריקה, אם לכל שרשרת בה יש חסם מלעיל, אז יש בה איבר מינימלי.

למה 2.7 לכל מסנן $\mathcal{F}$ על קבוצה X , קיים על-מסנן $\mathcal{U}$ על X המכיל את $\mathcal{F}$.

הוכחה: תהי P קבוצת כל המסננים המכילים את $\mathcal{F}$, סדורה חלקית על ידי היחס $\subseteq$.

P מקיימת את תנאי הלמה של צורן: $\mathcal{F} \in P$ ולכן $P \neq \emptyset$. כמו כן, לכל שרשרת של מסננים ב P , איחודם הוא מסנן המכיל את כולם, ולכן חסם מלעיל של השרשרת. מהלמה של צורן, יש ב P איבר מקסימלי $\mathcal{U}$. מהגדרת P , $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

נראה ש $\mathcal{U}$ על-מסנן: יהי $A \subseteq X$, ונניח ש $A, A^c \notin \mathcal{U}$. אז לכל $B \in \mathcal{U}$, $B \cap A \neq \emptyset$. לכן, כל חיתוך של מספר סופי של איברים של $\mathcal{U} \cup \{A\}$ אינו ריק, והמסנן הנוצר $\langle \mathcal{U} \cup \{A\} \rangle$ מכיל את $\mathcal{U}$ ואינו שווה לו (כי $A \notin \mathcal{U}$), בסתירה למקסימליות של $\mathcal{U}$.

בהוכחה האחרונה, הראינו בפרט את העובדה הבאה.

מסקנה 2.8 מסנן הוא על-מסנן אם ורק אם הוא מקסימלי (מבחינת הכלה).

תרגיל 3: הוכח את הטענות הבאות, המשלימות את הוכחת הלמה האחרונה:

1. איחוד של שרשרת של מסננים הוא מסנן.
2. אם $\mathcal{F}$ מסנן כך ש $A^c \notin \mathcal{F}$, אז לכל $B \in \mathcal{F}$ מתקיים $B \cap A \neq \emptyset$.

מסקנה 2.9 תהי X קבוצה אינסופית.

1. יש על-מסנן לא ראשי על X .
2. לכל קבוצה אינסופית $A \subseteq X$, יש על-מסנן לא ראשי $\mathcal{U}$ על X כך ש $A \in \mathcal{U}$.
3. תהי $\mathcal{A}$ משפחה של תת-קבוצות של X כך שכל חיתוך של מספר סופי של איברים מ $\mathcal{A}$ הוא אינסופי. אזי יש על-מסנן לא ראשי $\mathcal{U}$ על X כך ש $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.

הוכחה: (3) יהי $\mathcal{F}$ מסנן הקבוצות הקו-סופיות ב X . לכל מספר סופי של איברים ב $\mathcal{A} \cup \mathcal{F}$, חיתוכם אינסופי (אלה מ $\mathcal{A}$ חיתוכם אינסופי, והשאר חיתוכם קו-סופי), ובפרט לא ריק. יהי $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{F} \rangle$ המסנן על X הנוצר על ידי משפחה זו. מהלמה לעיל, ניתן להרחיבו לעל-מסנן $\mathcal{U}$ על X . בפרט, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.

לכל $F \subseteq X$ סופית, F^c שייכת ל $\mathcal{F}$ ולכן ל $\mathcal{U}$. לכן, $F \notin \mathcal{U}$. בפרט, לכל $x \in X$ מתקיים $\{x\} \notin \mathcal{U}$ ולכן $\mathcal{U} \neq \mathcal{F}_x$.

(2) ניקח $\mathcal{A} = \{A\}$ ב (3).

(1) ניקח $\mathcal{A} = \emptyset$ ב (3).

■

הגדרה 2.10 מסנן על תת-קבוצה כלשהי A של X ייקרא מסנן ב X .

הגדרה 2.11 עבור פונקציה $f : X \rightarrow Y$ וקבוצות $A \subseteq X, B \subseteq Y$ נסמן

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(a) : a \in A\} \\ f^{-1}(B) &= \{x \in X : f(x) \in B\} \end{aligned}$$

אם $\mathcal{F}$ מסנן ב X , נכליל זאת בצורה המתבקשת:

$$f(\mathcal{F}) = \{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$$

למה 2.12 תהי $f : X \rightarrow Y$.

1. לכל מסנן $\mathcal{F}$ ב X , $f(\mathcal{F})$ מסנן ב Y .
2. לכל על-מסנן $\mathcal{U}$ ב X , $f(\mathcal{U})$ על-מסנן ב Y .

תרגיל 4: הוכח את הלמה האחרונה.

2.2 טיול: הוכחה של משפט רמזי בעזרת על-מסנן

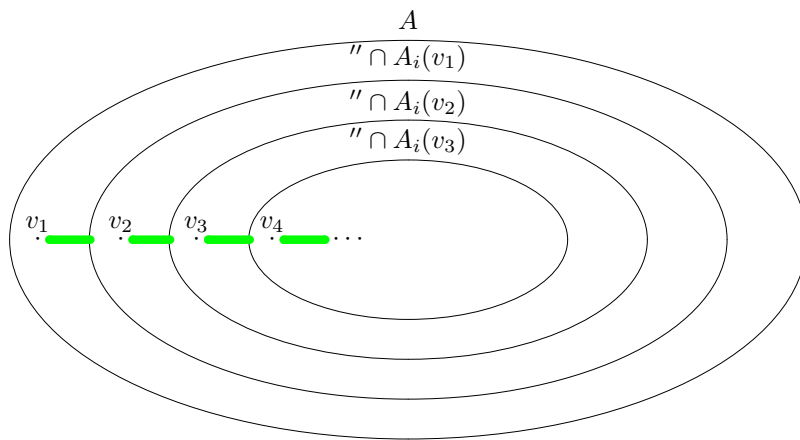
איננו טוענים שההוכחה הבאה קלה יותר מהוכחתו של רמזי, אבל יש בה אלמנט מפתיע: בהוכחה האלמנטרית של משפט רמזי, איננו יכולים לדעת מראש מה יהיה צבע הגרף המונכרומטי שנמצא. על-מסנן מאפשר לנו לדעת את צבע הגרף עוד לפני בנייתו.

הוכחת משפט רמזי בעזרת על-מסנן: יהי $\mathcal{U}$ על-מסנן לא-ראשי על קבוצת קודקודי הגרף, V . תהי $c: [V]^2 \rightarrow \{1, \dots, k\}$ צביעה של הגרף השלם. יהי $v \in V$. לכל $i \in \{1, \dots, k\}$, תהי $A_i(v)$ קבוצת כל הקודקודים המחוברים ל v בצבע i . אז

$$V \setminus \{v\} = A_1(v) \cup \dots \cup A_k(v)$$

$\mathcal{U}$ לא ראשי, לכן $V \setminus \{v\} \in \mathcal{U}$, ולכן יש i (למעשה, יחיד) כך ש $A_i(v) \in \mathcal{U}$. נסמן $\chi(v) = i$. קיבלנו צביעה χ של V ב k צבעים. $\mathcal{U}$ על-מסנן, לכן יש קבוצה מונכרומטית $A \in \mathcal{U}$ עבור χ . יהי צבעה i . נראה שיש תת-גרף אינסופי שלם מצבע i : ניקח

$$\begin{aligned} v_1 &\in A, \\ v_2 &\in A \cap A_i(v_1), \\ v_3 &\in A \cap A_i(v_1) \cap A_i(v_2), \\ &\vdots \end{aligned}$$



בכל שלב, הבחירה אפשרית כי חיתוך של מספר סופי של קבוצות בעל-מסנן נמצא אף הוא בעל-מסנן, ובפרט אינו ריק. הגרף השלם על $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ צבעו i : לכל $n < m$, $v_m \in A_i(v_n)$ ולכן $c(v_n, v_m) = i$. סוף ההוכחה.

בצורה אינטואיטיבית, אם נשתמש בביטוי "רוב מוחלט של הקודקודים" עבור קבוצת קודקודים שנמצאת בעל-מסנן, אפשר לנסח את ההוכחה כך: לכל קודקוד, יש צבע מועדף, כך שהרוב המוחלט של הקודקודים מחוברים אליו בצבע זה. ניקח צבע i שהוא מועדף על רוב מוחלט של הקודקודים. אז יש גרף מונכרומטי מצבע i (וקל לבנות).

מה עם משפט רמזי הסופי? על-מסנן לא יכול לעזור בצורה ישירה במקרה הסופי, כיון שעל-מסננים המכילים קבוצה סופית הם ראשיים. אבל, אפשר להשתמש בעל-מסננים להוכחת משפט הקומפקטיות, שמספיק כדי להסיק את משפט רמזי הסופי.

הוכחת משפט הקומפקטיות בעזרת על-מסנן: יהי $\mathcal{U}$ על-מסנן לא ראשי על $\mathbb{N}$, ונניח שלכל n יש צביעה c_n של $\{x_1, \dots, x_n\}$ שאין עבורה קבוצה מונוכרומטית ב $\mathcal{A}$. נגדיר צביעה $c : X \rightarrow \{1, \dots, k\}$ על ידי: לכל m , כאשר $c(x_m) = i$ הוא הצבע ש"הרוב המוחלט של הצביעות" נותנות ל x_m , רשמית: הצבע שעבורו $\{n \geq m : c_n(x_m) = i\} \in \mathcal{U}$. אז אין ב $\mathcal{A}$ קבוצה מונוכרומטית עבור c : אילו $F \in \mathcal{A}$ היתה מונוכרומטית עבור c , אז כיון ש F סופית, יש N כך ש $F \subseteq \{x_1, \dots, x_N\}$, ואז חיתוך הקבוצות

$$\begin{aligned} & \{n \geq 1 : c_n(x_1) = c(x_1)\}, \\ & \{n \geq 2 : c_n(x_2) = c(x_2)\}, \\ & \vdots \\ & \{n \geq N : c_n(x_N) = c(x_N)\} \end{aligned}$$

שייך ל $\mathcal{U}$, ובפרט אינו ריק. ניקח n השייך לחיתוך זה. אז c_n מתלכדת עם c על $x_1, \dots, x_N$ ובפרט על אברי F , ולכן F מונוכרומטית עבור c_n . סתירה.

2.3 מרחבים טופולוגיים

הגדרה 2.13 טופולוגיה על קבוצה X היא משפחה τ של תת-קבוצות של X , עם התכונות הבאות:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. לכל $U, V \in \tau$, גם $U \cap V \in \tau$.
3. לכל $\{U_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \tau$, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.
4. תכונת האוסדורף: לכל $x, y \in X$ שונים, יש $U, V \in \tau$ זרות כך ש $x \in U, y \in V$.

מרחב שמוגדרת עליו טופולוגיה, נקרא מרחב טופולוגי, והקבוצות U בטופולוגיה נקראות קבוצות פתוחות.

הערה: תכונת האוסדורף לא תמיד נדרשת ממרחבים טופולוגיים. מרחבים המקיימים אותה נקראים בדרך כלל מרחבי האוסדורף, או מרחבי T_2 . בספר זה, כל המרחבים הם האוסדורף ולכן לא נציין זאת במפורש.

בכל הפרק הזה, X הוא מרחב טופולוגי עם טופולוגיה נתונה עליו.

הגדרה 2.14 סביבה (neighborhood) של נקודה $x \in X$ היא קבוצה $N \subseteq X$ כך שיש $U \in \tau$ פתוחה עם $x \in U \subseteq N$.

תרגיל 5: לכל נקודה $x \in X$, המשפחה $\mathcal{N}_x$ של כל הסביבות של נקודה x היא מסנן על X .

הגדרה 2.15 הסגור של קבוצה $A \subseteq X$ הוא הקבוצה $\bar{A}$ של כל הנקודות שכל סביבה שלהן חותכת את A . קבוצה $A \subseteq X$ היא סגורה אם $\bar{A} = A$.

תרגיל 6: A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

המסנן של כל הסביבות של x "מרוכז" סביב הנקודה x . ההגדרה הבאה מכלילה זאת.

הגדרה 2.16 יהי $\mathcal{F}$ מסנן ב X . $x \in X$ היא נקודה גבול של $\mathcal{F}$ אם לכל סביבה U של x , יש ב $\mathcal{F}$ קבוצה המוכלת ב U .

למה 2.17 לכל מסנן ב X , יש לכל היותר נקודת גבול אחת.

הוכחה: נניח ש x, y נקודות גבול שונות של מסנן $\mathcal{F}$. מתכונת האוסדורף, יש סביבות זרות U, V של x, y בהתאמה. ניקח $A, B \in \mathcal{F}$ המוכלות ב U, V בהתאמה. אז $\emptyset = A \cap B \in \mathcal{F}$.
 ■
 סתירה.

הגדרה 2.18 יהי $\mathcal{F}$ מסנן ב X עם נקודת גבול x . במקרה זה, נאמר ש $\mathcal{F}$ מתכנס ל x , ונכתוב $\lim \mathcal{F} = x$ או $\mathcal{F} \rightarrow x$.

למשל, $\lim \mathcal{N}_x = x$ לכל $x \in X$.

יהיו $x_1, x_2, \dots \in X$ איברים שונים. ההגדרה המקובלת לטענה $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ היא: לכל סביבה U של x , $x_n \in U$ מאיזהו n ואילך. באופן שקול, אפשר לומר שהמסנן של פרשה על הקבוצה $\{x_1, x_2, \dots\}$ מתכנס ל x (!). הסיבה שאיננו מסתפקים בגבולות של סדרות היא, שעבור המרחב הטופולוגי החשוב ביותר שנפגוש בספר זה, המשפט הבא אינו נכון אם נחליף "מסנן" ב"סידרה".

משפט 2.19 תהי $A \subseteq X$. אם ורק אם יש מסנן $\mathcal{F}$ ב A המתכנס ל x .

הוכחה: ($\Leftarrow$) תהי $\mathcal{N}_x$ משפחת כל הסביבות של x . כיון שכל סביבה של x חותכת את A , הקבוצה $\mathcal{F} = \{N \cap A : N \in \mathcal{N}_x\}$ מסנן. $\mathcal{F} \rightarrow x$.

($\Rightarrow$) כל סביבה של x מכילה איבר של $\mathcal{F}$, וזה האחרון מוכל ב A .
 ■

הגדרה 2.20 יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, $f : X \rightarrow Y$, $a \in X$.

1. f רציפה ב a אם לכל סביבה V של $f(a)$ יש סביבה U של a , כך שלכל $x \in U$ מתקיים $f(x) \in V$.

2. f רציפה אם f רציפה בכל נקודה של X .

תרגיל 7: $f : X \rightarrow Y$ רציפה אם ורק אם לכל V פתוחה ב Y , $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X .

תרגיל 8: $f : X \rightarrow Y$ רציפה ב a אם ורק אם לכל מסנן $\mathcal{F}$ ב X כך ש $\mathcal{F} \rightarrow a$, מתקיים $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(a)$.

2.4 מרחבים קומפקטיים

הגדרה 2.21 כיסוי פתוח של מרחב טופולוגי X הוא משפחה $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ של קבוצות פתוחות כך ש $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. X קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת-כיסוי סופי.

הגדרה 2.22 יהי X מרחב טופולוגי עם טופולוגיה τ_X , ותהי $Y \subseteq X$. הטופולוגיה המושרית על Y היא המשפחה

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau_X\}$$

Y , עם הטופולוגיה המושרית עליה, תיקרא תת-מרחב של X .

תרגיל 10: בסימוני ההגדרה, Y עם הטופולוגיה המושרית על Y הוא מרחב טופולוגי.

למה 2.23 כל תת-קבוצה סגורה של מרחב קומפקטי היא קומפקטית (ביחס לטופולוגיה המושרית עליה).

הוכחה: תהי $A \subseteq X$ סגורה. יהי $\{U_\alpha \cap A : \alpha \in I\}$ כיסוי פתוח של A , כאשר כל U_α פתוחה ב- X . A^c פתוחה ב- X , ולכן $\{U_\alpha \cup A^c : \alpha \in I\}$ כיסוי פתוח של X . קומפקטי, ולכן יש תת-כיסוי סופי $\{U_{\alpha_1} \cup A^c, \dots, U_{\alpha_n} \cup A^c\}$ של X . לכן, $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ כיסוי של A . ■

תרגיל 10: יהיו X מרחב קומפקטי, Y מרחב טופולוגי, ו- $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה. הוכח שהתמונה של f , כתת-מרחב של Y , היא מרחב קומפקטי. בפרט, אם f היא פונקציה על, אז גם המרחב Y קומפקטי.

משפט 2.24 קומפקטי אם ורק אם כל על-מסנן ב- X מתכנס.

הוכחה: ($\Leftarrow$) יהי $\mathcal{U}$ על-מסנן ב- X בלי נקודת גבול: לכל $x \in X$ יש סביבה פתוחה U_x , כך שאין ב- $\mathcal{U}$ קבוצה המוכללת ב- U_x . קומפקטי, לכן יש לכיסוי הפתוח $\{U_x : x \in X\}$ תת-כיסוי סופי $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. נקבע $A \in \mathcal{U}$. $A \subseteq X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. לכן

$$(A \cap U_{x_1}) \cup (A \cap U_{x_2}) \cup \dots \cup (A \cap U_{x_n}) = A \in \mathcal{U}$$

לכן יש $i \in \{1, \dots, n\}$ כך ש- $A \cap U_{x_i} \in \mathcal{U}$, וקבוצה זו מוכללת ב- U_{x_i} . סתירה.

($\Rightarrow$) נניח ש- X אינו קומפקטי. יהי $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ כיסוי פתוח של X שאין לו תת-כיסוי סופי. נתבונן במשפחה $\mathcal{A} = \{U_\alpha^c : \alpha \in I\}$. לכל מספר סופי של איברים של $\mathcal{A}$ יש חיתוך לא ריק: $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \neq X$, ולכן

$$U_{\alpha_1}^c \cap \dots \cap U_{\alpha_n}^c = (U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n})^c \neq \emptyset$$

לכן, $\mathcal{F} = \langle \mathcal{A} \rangle$ (הסגור של $\mathcal{A}$ תחת חיתוכים סופיים וכלפי מעלה) מסנן, וניתן להרחיבו לעל-מסנן $\mathcal{U}$ על X . מהנתון, יש ל- $\mathcal{U}$ נקודת גבול x . יהי $\alpha \in I$ כך ש- $x \in U_\alpha$. ניקח $A \in \mathcal{U}$ כך ש- $A \subseteq U_\alpha$. אז A זרה ל- U_α^c , שנמצאת ב- $\mathcal{A}$, ולכן ב- $\mathcal{U}$. מצאנו שתי קבוצות זרות בעל-מסנן $\mathcal{U}$. סתירה. ■

לעתים נוח לתאר טופולוגיה על מרחב בעזרת תיאור קבוצות פתוחות "בסיסיות".

הגדרה 2.25 יהי X מרחב טופולוגי. משפחה $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ היא בסיס עבור הטופולוגיה של X אם

1. כל $U \in \mathcal{B}$ היא קבוצה פתוחה.

2. כל קבוצה פתוחה U היא איחוד של קבוצות מ- $\mathcal{B}$: יש $\{U_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ כך ש- $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = U$.

אברי $\mathcal{B}$ נקראים קבוצות פתוחות בסיסיות.

מסקנה 2.26 משפחה $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ היא בסיס עבור (איזשהי) טופולוגיה על X אם ורק אם מתקיים:

1. איחוד כל אברי $\mathcal{B}$ הוא X .

2. לכל $U, V \in \mathcal{B}$ ולכל $x \in U \cap V$, יש $W \in \mathcal{B}$ כך ש- $x \in W \subseteq U \cap V$.

3. לכל $x, y \in X$ שונים, יש $U, V \in \mathcal{B}$ זרות כך ש $x \in U, y \in V$.

תרגיל 11: הוכח את המסקנה האחרונה.

במקרה המתואר במסקנה, הטופולוגיה של $\mathcal{B}$ בסיס עבורה היא משפחת כל האיחודים של איברים ב $\mathcal{B}$. אפשר להשתמש במסקנה כדי להגדיר טופולוגיה על X . אם $\mathcal{B}$ מקיים את התכונות שבמסקנה, קבוצה תוגדר כפתוחה אם ורק אם היא איחוד של איברים מ $\mathcal{B}$.

מקרה שבו תכונה (2) במסקנה מיידית הוא, כאשר לכל $U, V \in \mathcal{B}$ מתקיים $U \cap V \in \mathcal{B}$. זה למשל המצב במקרה החשוב הבא.

הגדרה 2.27 (מכפלת מרחבים טופולוגיים) יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. טופולוגיית המכפלה על $X \times Y$ היא זו שהקבוצות $U \times V$, כך ש U פתוחה ב X ו V פתוחה ב Y , מהוות בסיס עבורה. באופן כללי, בסיס עבור המכפלה $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ של n מרחבים טופולוגיים הן הקבוצות מהצורה $U_1 \times \dots \times U_n$ כך שלכל $i = 1, \dots, n$ פתוחה ב X_i .

תרגיל 12: הוכח שטופולוגיית המכפלה היא אכן טופולוגיה, כלומר שהבסיס שהוגדר הוא אכן בסיס של טופולוגיה.

בספר זה, מכפלת מרחבים טופולוגיים תמיד תילקח עם טופולוגיית המכפלה.

כאשר מדובר במרחב טופולוגי ותת-מרחב שלו $Y \subseteq X$, יותר נוח לקרוא כיסוי פתוח של Y לכיסוי של Y על ידי קבוצות פתוחות ב X .

משפט 2.28 מכפלת מספר סופי של מרחבים קומפקטיים היא קומפקטית.

הוכחה: מספיק להוכיח עבור מכפלת שני מרחבים.

יהיו X, Y מרחבים קומפקטיים. מספיק להראות שכל על-מסנן ב $X \times Y$ מתכנס (משפט 2.24). יהי $\mathcal{U}$ על-מסנן ב $X \times Y$. נתבונן בפונקציות ההטלה

$$\begin{aligned}\pi_1: X \times Y &\rightarrow X \\ \pi_2: X \times Y &\rightarrow Y\end{aligned}$$

המוגדרות על ידי $\pi_1(x, y) := x, \pi_2(x, y) := y$. $\pi_1(\mathcal{U}), \pi_2(\mathcal{U})$ על-מסננים במרחבים הקומפקטיים X, Y בהתאמה, ולכן מתכנסים לנקודות $x \in X, y \in Y$ בהתאמה. נראה ש $\mathcal{U}$ מתכנס ל (x, y) .

תהי U קבוצה פתוחה ב $X \times Y$ כך ש $(x, y) \in U$. U היא איחוד של קבוצות פתוחות בסיסיות, ולכן (x, y) שייכת לקבוצה פתוחה בסיסית $V \times W$ המוכלת ב U . $\pi_1(x, y) = x \in V$, ולכן יש $A \in \mathcal{U}$ כך ש $A \subseteq V$. בדומה עבור y , נקבל $B \in \mathcal{U}$ כך ש $B \subseteq W$. $\pi_2(B) \subseteq W$. אז $C := A \cap B \in \mathcal{U}$ ומתקיים $C \subseteq V \times W \subseteq U$ ולכן $\pi_1(C) \subseteq V, \pi_2(C) \subseteq W$. ■

2.5 טיול: משפט טיכונוף ומשפט קומפקטיות מוכלל עבור צביעות

הגדרה 2.29 תהי $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים. המכפלה של משפחה זו היא הקבוצה

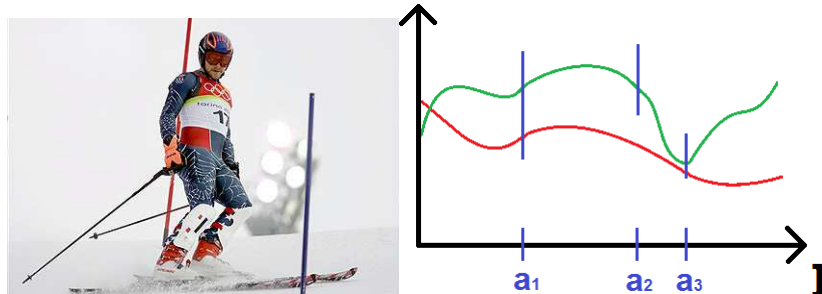
$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

של כל הפונקציות f שתחומן I ומקיימות $f(\alpha) \in X_\alpha$ לכל $\alpha \in I$. בסיס לטופולוגיה על $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ נתון על ידי הקבוצות

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_n; U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}] = \left\{ f \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha : \forall i = 1, \dots, n, f(\alpha_i) \in U_{\alpha_i} \right\}$$

כאשר n טבעי כלשהו, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ ו U_{α_i} פתוחה ב X_{α_i} לכל $i = 1, \dots, n$. הטופולוגיה שמגדיר בסיס זה נקראת טופולוגיית המכפלה של טיכונוף (Tychonoff), והמרחב הטופולוגי המתקבל נקרא מרחב המכפלה.

המחשה של קבוצה פתוחה בסיסית בטופולוגיית המכפלה נתונה באיור הבא, שמתאר קבוצה פתוחה בסיסית:



איור: סלאום שמתאר את הקבוצה $[a_1, a_2, a_3; U_{a_1}, U_{a_2}, U_{a_3}]$.

המצב דומה ל"סלאום" בסקי. יש לעבור דרך כל הקבוצות הפתוחות ("שערים") שנקבעו. הפונקציה המתוארת על ידי הקו הירוק שייכת לקבוצה הפתוחה, כיון שבכל אחת מהנקודות a_1, a_2, a_3 , היא עוברת דרך הקבוצה הפתוחה הנדרשת (שמסומנת כקטע כחול). לעומת זאת, הפונקציה המתוארת על ידי הקו האדום (גולש כבד) אינה שייכת לקבוצה הפתוחה, כי היא פיספה את השער שהוצב ב a_2 .

תרגיל 13: הוכח שעבור הקבוצות הבסיסיות בטופולוגיית המכפלה, מספיק לקחת את אלה כך שכל U_{α_i} פתוחה בסיסית ב X_{α_i} .

תרגיל 14: יהי $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ מרחב מכפלה. הוכח את הטענות הבאות (שמראות שאכן מרחב המכפלה הוא מרחב טופולוגי):

1. X הוא קבוצה פתוחה בסיסית.
2. כל חיתוך של שתי קבוצות פתוחות בסיסיות הוא קבוצה פתוחה בסיסית.
3. ל X יש תכונת האוסדורף.

הגדרה 2.30 יהי $\beta \in I$. פונקציה ההטלה על רכיב β היא הפונקציה $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ המוגדרת על ידי

$$\pi_\beta(f) := f(\beta)$$

לכל $f \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

טופולוגית המכפלה היא הטופולוגיה הקטנה ביותר (מבחינת הכלה) שעבורה כל פונקציות ההטלה הן רציפות.

מסקנה 2.31 אם מרחב המכפלה $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ קומפקטי, אז לכל $\alpha \in I$, X_α קומפקטי.

הוכחה: לכל $\alpha \in I$, X_α הוא התמונה של הפונקציה הרציפה π_α . תמונה רציפה של מרחב קומפקטי היא קומפקטית. ■

הכיוון ההפוך למסקנה האחרונה הוא משפט מרכזי בטופולוגיה. בעזרת על-מסננים, נקבל הוכחה קצרה שלו.

למה 2.32 יהי B בסיס לטופולוגיה של Y . פונקציה $f : X \rightarrow Y$ היא רציפה אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה בסיסית V ב Y , $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X .

הוכחה: כל קבוצה פתוחה ב Y היא איחוד של קבוצות פתוחות בסיסיות ב Y . ■

משפט 2.33 (טיכונוף) מכפלה של מרחבים קומפקטיים היא קומפקטית: אם X_α קומפקטי לכל $\alpha \in I$, אז מרחב המכפלה $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ הוא קומפקטי.

הוכחה: ההוכחה זהה להוכחת המקרה הסופי (משפט 2.28).

מספיק להראות שכל על-מסנן במרחב המכפלה מתכנס (משפט 2.24). יהי $\mathcal{U}$ על-מסנן ב $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. לכל $\alpha \in I$, $\pi_\alpha(\mathcal{U})$ על-מסנן במרחב הקומפקטי X_α , ולכן מתכנס לאיזשהי $x_\alpha \in X_\alpha$. נגדיר $f \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ על ידי

$$f(\alpha) = x_\alpha$$

לכל $\alpha \in I$. נראה ש $\mathcal{U}$ מתכנס ל f .

תהי U קבוצה פתוחה כך ש $f \in U$. U היא איחוד של קבוצות פתוחות בסיסיות, ולכן f שייכת לקבוצה פתוחה בסיסית

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_n; U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}]$$

המוכלת ב U . יהי $i \in \{1, \dots, n\}$. $x_{\alpha_i} = f(\alpha_i) \in U_{\alpha_i}$, ולכן יש $A_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$ כך ש $\pi_{\alpha_i}(A_{\alpha_i}) \subseteq U_{\alpha_i}$.

$$A_{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{\alpha_n} \in \mathcal{U}$$

וקבוצה זו מוכלת ב $[\alpha_1, \dots, \alpha_n; U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}]$ (ובפרט ב U): לכל h בקבוצה זו ולכל $i = 1, \dots, n$,

$$h(\alpha_i) = \pi_{\alpha_i}(h) \in \pi_{\alpha_i}(A_{\alpha_i}) \subseteq U_{\alpha_i}$$

■

בתור דוגמא ליישום של משפט טיכונוף, נוכיח את משפט הקומפקטיות של צביעות לכל "לוח צביעה", לאו דווקא בן מניה. ראשית, נשים לב שלכל קבוצה X , המשפחה $P(X)$ היא טופולוגיה על X .

הגדרה 2.34 מרחב טופולוגי הוא זיסקרטי אם כל תת-קבוצה שלו היא פתוחה. במילים אחרות, X זיסקרטי אם הטופולוגיה שלו היא $P(X)$.

בסיס פשוט לטופולוגיה הדיסקרטית על X הוא המשפחה $\{\{x\} : x \in X\}$. כיון שבטופולוגיה הדיסקרטית כל הקבוצות פתוחות, מרחבים דיסקרטיים אינם מעניינים בפני עצמם. אבל אפשר לבנות מהם מרחבים מעניינים ושימושיים, כמו שנראה בהוכחת המשפט הבא.

משפט 2.35 (משפט הקומפקטיות המלא) תהי X קבוצה כלשהי, ותהי $\mathcal{A}$ משפחה של תת-קבוצות סופיות של X . נניח שלכל צביעה של אברי X ב k צבעים, יש ב $\mathcal{A}$ קבוצה מונוכרומטית. אזי יש תת-קבוצה סופית $F \subseteq X$ כך שלכל צביעה שלה ב k צבעים, יש ב $\mathcal{A}$ קבוצה מונוכרומטית.

הוכחה: ניקח את הטופולוגיה הדיסקרטית על הקבוצה $\{1, \dots, k\}$.

נתבונן במרחב המכפלה $Y = \prod_{x \in X} \{1, \dots, k\} = \{1, \dots, k\}^X$ כלומר כאשר כל המרחבים הנכפלים שווים למרחב הדיסקרטי $\{1, \dots, k\}$. אברי Y הם בדיוק הצביעות $c: X \rightarrow \{1, \dots, k\}$. ממשפט טיכונוף, Y קומפקטי.

תהי $c \in Y$. הנתון במשפט אומר שיש $F \in \mathcal{A}$ ויש $i \in \{1, \dots, k\}$ כך שלכל $x \in F$, $c(x) = i$. כלומר, אם נכתוב $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ אז

$$c \in [x_1, \dots, x_n; \{i\}, \dots, \{i\}]$$

נסמן בקיצור קבוצה פתוחה בסיסית כזו $[F; i]$. אז המשפחה

$$\{[F; i] : F \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, k\}$$

היא כיסוי פתוח של Y , ולכן יש לה תת-כיסוי סופי, $\{[F_1; i_1], \dots, [F_n; i_n]\}$.

ניקח $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$. לכל צביעה c של אברי F , נרחיב אותה בצורה שרירותית לצביעה $\tilde{c}$ של כל אברי X . אז יש $m = 1, \dots, n$ כך ש $\tilde{c} \in [F_m; i_m]$, ולכן F_m מונוכרומטית עבור $\tilde{c}$. כיון ש c מוגדרת על F ומתלכדת עליה עם $\tilde{c}$, F_m מונוכרומטית עבור c . $F_m \in \mathcal{A}$. ■

3 הקומפקטיפיקציה של סטון-צ'יך

3.1 מרחב העל-מסננים

הגדרה 3.1 תהי X קבוצה אינסופית. βX היא קבוצת כל העל-מסננים על X .

נגדיר טופולוגיה על βX , וכיון שכך, נרצה לחשוב על איבריו כנקודות. לכן, נסמן מעתה על-מסננים באותיות קטנות.

הגדרה 3.2 לכל $A \subseteq X$, תהי

$$[A] := \{p \in \beta X : A \in p\}$$

הטופולוגיה של βX היא זו שהקבוצות $[A]$ ($A \subseteq X$) מהוות בסיס עבורה.

תרגיל 1: הוכח, בעזרת מסקנה 2.26, שהמשפחה $\mathcal{B} = \{[A] : A \subseteq X\}$ היא בסיס לטופולוגיה על βX .

תרגיל 2: הוכח את הטענות הבאות.

א. $[\emptyset] = \emptyset$.

ב. $[X] = \beta X$.

ג. לכל $A \subseteq X$, $[A]^c = [A^c]$. בפרט, הקבוצה הפתוחה $[A]$ היא גם סגורה ב βX .

ד. שלכל $A, B \subseteq X$, מתקיים $[A \cup B] = [A] \cup [B]$ וכן $[A \cap B] = [A] \cap [B]$.

משפט 3.3 מרחב קומפקטי.

הוכחה: נניח שלא, ויהי נתון כיסוי של βX בלי תת-כיסוי סופי. אפשר להניח שהכיסוי הוא מהצורה $\{[A_\alpha] : \alpha \in I\}$, קבוצת אינדקסים כלשהי. לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$,

$$[A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_n}] = [A_{\alpha_1}] \cup \dots \cup [A_{\alpha_n}] \neq \beta X = [X]$$

ולכן $A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_n} \neq X$. לכן, כל חיתוך של מספר סופי של איברים במשפחה $\mathcal{F} = \{A_\alpha^c : \alpha \in I\}$ הוא לא ריק, ולכן יש $p \in \beta X$ המכיל את $\mathcal{F}$. יהי $\alpha \in I$ כך ש $p \in [A_\alpha]$. אז $A_\alpha, A_\alpha^c \in p$, סתירה. ■

הגדרה 3.4 עבור $x \in X$, p_x הוא העל-מסנן הראשי המוגדר על ידי x . הפונקציה מ X ל βX המוגדרת על ידי $x \mapsto p_x$ היא חד-חד ערכית. לשם קיצור, נזהה את x עם העל-מסנן p_x , כך ש $X \subseteq \beta X$.

נזכור שמרחב טופולוגי הוא דיסקרטי אם כל תת-קבוצה שלו היא פתוחה. נקודה x במרחב טופולוגי היא מצודת אם $\{x\}$ קבוצה פתוחה, כלומר יש לנקודה x סביבה שלא מכילה אף נקודה אחרת. לכן, מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי אם ורק אם כל נקודותיו מבודדות.

אפשר לחשוב על הטענה הבאה כאומרת, שכל משטר דיקטטורי הוא מבודד, אבל בכל סביבה של כל משטר אפשר למצוא משטר דיקטטורי. תת-קבוצה של מרחב טופולוגי נקראת צפופה אם הסגור שלה הוא המרחב כולו.

למה 3.5 כל נקודה של X מבודדת ב βX , אבל X צפוף ב βX .

פורמלית: לכל $x \in X$, הקבוצה $\{p_x\}$ פתוחה ב βX , והסגור של $\{p_x : x \in X\}$ הוא βX .

הוכחה: $p \in [\{x\}] \Leftrightarrow \{x\} \in p \Leftrightarrow p = p_x$, לכן, $[\{x\}] = \{p_x\}$ קבוצה פתוחה לכל $x \in X$.

מאידך, לכל $q \in \beta X$ ולכל סביבה $A \in q, q \in [A]$ ולכן $A \neq \emptyset$. ניקח $x \in A$ אז $A \in p_x$, כלומר $p_x \in [A]$. ■

תרגיל 3: הוכח שלכל $A \subseteq X, \bar{A} = [A]$ (פורמלית: $\overline{\{p_x : x \in A\}} = [A]$). כיצד זה מכליל את הסיפא של הלמה האחרונה?

הגדרה 3.6 קומפקטיפיקציה של מרחב טופולוגי X היא מרחב קומפקטי K כך ש X תת-מרחב צפוף של K .

אם נחשוב על X כמרחב טופולוגי דיסקרטי, אז הלמה האחרונה אומרת ש βX הוא קומפקטיפיקציה של X . קומפקטיפיקציה זו נקראת הקומפקטיפיקציה של סטון-צ'ך (Stone-Čech).

3.2 טיול: מקורן של הקבוצות הפתוחות ב βX

נראה כאן דרך טבעית לקבל את הטופולוגיה שהגדרנו על βX . תהי I קבוצה כלשהי, וניקח את הקבוצה $\{0, 1\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. ממשפט טיכונוף, מרחב המכפלה

$$\{0, 1\}^I = \prod_{\alpha \in I} \{0, 1\}$$

הוא קומפקטי. הקבוצות הפתוחות הבסיסיות במרחב זה הן

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_n; \{i_1\}, \dots, \{i_n\}] = \{f \in \{0, 1\}^I : \forall m = 1, \dots, n, f(\alpha_m) = i_m\}$$

כאשר n טבעי, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ ו $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$. על ידי שינוי סדר האיברים, אפשר להניח שיש $m \leq n$ כך ש $i_1 = \dots = i_m = 0$ ו $i_{m+1} = \dots = i_n = 1$. בגישה זו, נוכל לסמן את הקבוצות הפתוחות הבסיסיות כך:

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_r] := \left\{ f \in \{0, 1\}^I : \begin{array}{l} f(\alpha_1) = \dots = f(\alpha_m) = 0, \\ f(\beta_1) = \dots = f(\beta_r) = 1 \end{array} \right\}$$

אפשר לזהות את $\{0, 1\}^I$ עם $P(I)$: נזהה כל תת-קבוצה $J \subseteq I$ עם הפונקציה האופיינית $\chi_J \in \{0, 1\}^I$ המוגדרת על ידי

$$\chi_J(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \in J \\ 0 & \alpha \notin J \end{cases}$$

לכל $\alpha \in I$. זיהוי זה מגדיר טופולוגיה טבעית על $P(I)$: הקבוצות הפתוחות הבסיסיות הן, לכן,

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_r] = \{J \in P(I) : \alpha_1, \dots, \alpha_m \notin J, \beta_1, \dots, \beta_r \in J\}$$

על סמך הזיהוי הנ"ל, נקרא גם לטופולוגיה המתקבלת על $P(I)$ טופולוגיית המכפלה.

I יכולה להיות כל קבוצה. בפרט, אפשר לקחת $I = P(X)$ לכל X .

הגדרה 3.7 יהיו X קבוצה כלשהי, ו $I = P(X)$. במרחב הטופולוגי $P(I)$ עם טופולוגיית המכפלה, ניקח את תת-המרחב βX של כל העל-מסננים על X . הטופולוגיה על βX היא זו המושרית מ $P(I)$.

מהן הקבוצות הפתוחות הבסיסיות ב βX ? מהאמור לעיל, יש לקחת מספר סופי כלשהו של איברים $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_r \in I = P(X)$, כלומר תת-קבוצות של X , והקבוצה הפתוחה הבסיסית שהם מגדירים היא

$$[A_1, \dots, A_m; B_1, \dots, B_r] = \{p \in \beta X : A_1, \dots, A_m \notin p, B_1, \dots, B_r \in p\}$$

כעת, כל $p \in \beta X$ הוא על-מסנן, ולכן

$$\begin{aligned} A_1, \dots, A_m \notin p, B_1, \dots, B_r \in p &\Leftrightarrow A_1^c, \dots, A_m^c, B_1, \dots, B_r \in p \\ &\Leftrightarrow A_1^c \cap \dots \cap A_m^c \cap B_1 \cap \dots \cap B_r \in p \end{aligned}$$

לכן, אם ניקח $A := A_1^c \cap \dots \cap A_m^c \cap B_1 \cap \dots \cap B_r$, אז הקבוצה הפתוחה הבסיסית הכללית מקבלת את הצורה

$$[A] := \{p \in \beta X : A \in p\}$$

כל כך פשוט!

בגישה זו, הוכחת הקומפקטיות מאד טבעית.

משפט 3.8 מרחב קומפקטי.

הוכחה: תהי $I = P(X)$. βX תת-מרחב של $P(I)$ עם טופולוגיית המכפלה. ממשפט טיכונוף, $P(I)$ מרחב קומפקטי, ולכן מספיק להראות ש βX קבוצה סגורה ב $P(I)$. תהי $q \in P(I) \setminus \beta X$. יש להראות ש q שייכת לקבוצה פתוחה הזרה ל βX . אכן, כל סיבה אפשרית לכך ש q אינה על-מסנן, מגדירה קבוצה פתוחה (שזרה ל βX), כיון שכל הסיבות מדברות על שייכות או אי-שייכות של קבוצות מסוימות ל q . למשל:

1. אם $q \notin X$ אז $q \in [X;]$, שזרה ל βX .

2. אם $\emptyset \in q$ אז $q \in [; \emptyset]$, שזרה ל βX .

3. אם יש q כד $X \supseteq B \supseteq A$ אז $q \in [B; A]$, שזרה ל βX .

■

ובדומה עבור שאר התכונות הנדרשות מעל-מסנן.

תרגיל 4: השלם את המקרים החסרים בהוכחה ש βX קומפקטי.

3.3 משפט ההרחבה

למה 3.9 (רגולריות) יהי K מרחב קומפקטי. לכל $x \in K$ ולכל סביבה U של x , יש סביבה $V \subseteq U$ של x כך ש V סגורה.

הוכחה: אפשר להניח ש U פתוחה. U^c סגורה במרחב קומפקטי ולכן קומפקטית. לכל $y \in U^c$, נבחר סביבות פתוחות זרות V_y, U_y של x, y בהתאמה. $\{U_y : y \in U^c\}$ כיסוי פתוח של קבוצה קומפקטית, ולכן יש תת-כיסוי סופי $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$ של U^c . ניקח

$$V = U_{y_1}^c \cap \dots \cap U_{y_n}^c$$

3.4 הוספת מבנה אלגברי

הגדרה 3.11 $(S, *)$ היא סמיחבורה (semigroup) אם S קבוצה לא ריקה, ו $*$ היא פעולה בינרית אסוציאטיבית על הקבוצה S . בפירוט:

1. לכל $a, b \in S$ מותאם איבר יחיד $a * b \in S$.

2. לכל $a, b, c \in S$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

בדרך כלל נשמיט את הסימן $*$ ונכתוב למשל ab במקום $a * b$.

הגדרה 3.12 תהי S סמיחבורה. נרחיב את הפעולה של S לפעולה על βS , בעזרת משפט ההרחבה:

1. נקבע $a \in S$. תהי $L_a : S \rightarrow S \subseteq \beta S$ פונקצית הכפל משמאל ב a :

$$L_a(x) := ax$$

ממשפט ההרחבה, יש לה הרחבה יחידה לפונקציה רציפה $\bar{L}_a : \beta S \rightarrow \beta S$.

$$\begin{array}{ccc} \beta S & & \\ \text{id} \uparrow & \searrow \bar{L}_a & \\ S & \xrightarrow{L_a} & \beta S \end{array}$$

נסמן $ap := \bar{L}_a(p)$, ונזכור שזו פונקציה רציפה במשתנה p .

2. נקבע $p \in \beta S$. תהי $R_p : S \rightarrow \beta S$ הפונקציה של כפל מימין ב p :

$$R_p(x) := xp$$

פונקציה זו מוגדרת, מהסעיף הקודם. ממשפט ההרחבה, יש לה הרחבה יחידה לפונקציה רציפה $\bar{R}_p : \beta S \rightarrow \beta S$.

$$\begin{array}{ccc} \beta S & & \\ \text{id} \uparrow & \searrow \bar{R}_p & \\ S & \xrightarrow{R_p} & \beta S \end{array}$$

נסמן $qp := \bar{R}_p(q)$, ונזכור שזו פונקציה רציפה במשתנה q .

תרגיל 9: הרכבה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה.

למה 3.13 βS , עם הפעולה המורחבת $qp \mapsto (q, p)$ היא סמיחבורה.

הוכחה: יהיו $p, q, r \in \beta S$. עלינו להוכיח ש $(rq)p = r(qp)$.

1. לכל $x, y, z \in S$ מתקיים

$$\bar{L}_{xy}(z) = L_{xy}(z) = (xy)z = x(yz) = L_x \circ L_y(z) = \bar{L}_x \circ \bar{L}_y(z)$$

כלומר הפונקציות הרציפות $\bar{L}_{xy}, \bar{L}_x \circ \bar{L}_y$ שוות על הקבוצה הצפופה S , ולכן על כל βS , ובפרט

$$(xy)p = \bar{L}_{xy}(p) = \bar{L}_x \circ \bar{L}_y(p) = x(y p)$$

2. מהמשוואה האחרונה, $\bar{R}_p \circ \bar{L}_x(y) = \bar{L}_x \circ \bar{R}_p(y)$, לכל $y \in S$, כלומר הפונקציות הרציפות $\bar{R}_p \circ \bar{L}_x, \bar{L}_x \circ \bar{R}_p$ שוות על S ולכן על כל βS . בפרט,

$$(xq)p = \bar{R}_p \circ \bar{L}_x(q) = \bar{L}_x \circ \bar{R}_p(q) = x(qp)$$

3. מהמשוואה האחרונה, הפונקציות הרציפות $\bar{R}_p \circ \bar{R}_q, \bar{R}_{qp}$ שוות על S ולכן על βS . בפרט, $r(qp) = (r q)p$ ■

הגדרה 3.14 סמיחבורה (טופולוגית) ימנית היא סמיחבורה שבה הפונקציה של כפל מימין בקבוע היא רציפה.

מקובל לקרוא למבנים אלגבריים מהסוג שאנו עוסקים בו בשמות המציניים מעגלי ידיות שונים (חבורה, חוג). ניתן שם ברוח זו למבנה החשוב ביותר בספרנו.

הגדרה 3.15 סחבקה היא סמיחבורה קומפקטית ימנית (האוסדורף).

מסקנה 3.16 לכל סמיחבורה S , βS היא סחבקה.

3.5 אידמפוטנטים

למה 3.17 (תכונת החיתוך הסופי) יהי K מרחב קומפקטי. לכל משפחה $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$ של קבוצות סגורות ב K כך שחיתוך כל מספר סופי מהן אינו ריק, מתקיים $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \neq \emptyset$.

הוכחה: אילו $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset$, אז $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha^c = K$ כיסוי פתוח, ולכן יש לו תת-כיסוי סופי ■ $C_{\alpha_1}^c \cup \dots \cup C_{\alpha_n}^c = K$, כלומר $C_{\alpha_1} \cap \dots \cap C_{\alpha_n} = \emptyset$. סתירה.

למה 3.18 יהי K מרחב קומפקטי. קבוצה $C \subseteq K$ היא סגורה אם ורק אם C קומפקטית.

הוכחה: ראינו כבר שכל סגורה היא קומפקטית. הוכחת הכיוון הנותר דומה להוכחת למת הרגולריות (3.9). ■

לכן, מעתה נעבור בחופשיות בין "סגורה" ל"קומפקטית" כאשר מדובר על תת-קבוצות של מרחב קומפקטי.

משפט 3.19 בכל סחבקה S יש אידמפוטנט, כלומר איבר $e \in S$ כך ש $ee = e$.

"משוך ימינה, משוך גם שמאלה, ולא זו הגזר" (סבא אליעזר והגזר)

הוכחה: ניעזר בלמה של צורן למצוא תת-סחבקה מינימלית (מבחינת הכלה) של S , ונראה שלסחבקה מינימלית חייבת להיות הצורה $\{e\}$ (ולכן $ee = e$).

אכן, האוסף $\mathcal{F}$ של כל התת-סחבקות של S מקיים את תנאי הלמה של צורן. למשל, חיתוך של שרשרת סחבקות אינו ריק, מתכונת החיתוך הסופי, והוא סגור כחיתוך של קבוצות סגורות. לכן, הוא סחבקה המוכלת בכל אברי השרשרת. מהלמה של צורן, יש סחבקה מינימלית $T \subseteq S$, כלומר כך שאין סחבקה $H \subsetneq T$.

נקבע $e \in T$. כיון שכפל ב e מימין היא פונקציה רציפה ו T קומפקטית, גם הקבוצה $Te = \{te : t \in T\}$ קומפקטית. $Te \subseteq T$ וסגורה לכפל (כי T סגורה לכפל ו $e \in T$), לכן זו סחבקה. ממינימליות T , $Te = T$. בפרט, $e \in Te$, ולכן, המייצג של e ב T , המוגדר

$$\text{stab}_T(e) := \{t \in T : te = e\} = R_e^{-1}[\{e\}] \cap T$$

אינו ריק. המייצב הוא סמיחבורה: אם t_1, t_2 במייצב, אז

$$(t_1 t_2)e = t_1(t_2 e) = t_1 e = e$$

כיון שהקבוצה $\{e\}$ סגורה ו $R_e^{-1}[\{e\}]$ סגורה ולכן גם חיתוכה עם הקבוצה הסגורה T הוא סגור. לכן, $\text{stab}_T(e)$ קומפקטית. לסיכום, $\text{stab}_T(e)$ סחבקה המוכלת ב T . ממינימליות T , $\text{stab}_T(e) = T$, ובפרט $e \in \text{stab}_T(e)$, כלומר $ee = e$.

בזה קיבלנו את הדרוש במשפט, אבל נובע גם ש $\{e\}$ סחבקה המוכלת ב T ולכן $T = \{e\}$. ■

מסקנה 3.20 תהי S סמיחבורה. בכל תת-סמיחבורה סגורה של βS יש אידמפוטנט.

תרגיל 10: הוכח שלכל אידמפוטנט $p \in \beta\mathbb{N}$ ולכל n טבעי, מתקיים $n\mathbb{N} \in p$.
הדרכה: יהי $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ההומומורפיזם הקנוני $\varphi(k) = k \pmod{n}$. (עם הטופולוגיה הדיסקרטית) קומפקטית, לכן יש הרחבה רציפה של φ להומומורפיזם (!) $\tilde{\varphi} : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_n$. אז $\tilde{\varphi}(p)$ אידמפוטנט חיבורי ב $\mathbb{Z}_n$, ולכן 0. השתמש ברציפות $\tilde{\varphi}$.

3.6 איפיון קומבינטורי של פעולת הכפל של βS

האיפיון הקומבינטורי הבא של פעולת הכפל ב βS יקצר טיעונים רבים בהמשך. איפיון זה הוכח על ידי גלאזר (Glazer).

משפט 3.21 (איפיון מכפלה) יהיו S סמיחבורה ו $p, q \in \beta S$.

$$1. pq = \{A \subseteq S : \exists B \in p \forall b \in B \exists C \in q, bC \subseteq A\}.$$

במילים אחרות, $A \in pq$ אם ורק אם יש $B \in p$ כך שלכל $b \in B$, $bC \subseteq A$ לאיזשהי $C \in q$.

$$2. \text{ לכל } A \in pq \text{ יש } b \in S \text{ ו } C \in q \text{ ש } bC \subseteq A.$$

הוכחה: (2) מידי מ (1). נוכיח את (1).

$pq \in [A]$ ($\Leftarrow$) $pq \in [A]$ מרציפות כפל מימין ב q ($\bar{R}_q$), יש סביבה $p \in [B]$ כך ש $[B]q \subseteq [A]$. $B \in p$.

יהי $b \in B$. $bq \in [B]q \subseteq [A]$, לכן מרציפות כפל משמאל באיבר של S ($\bar{L}_b$), יש סביבה $q \in [C]$ כך ש $b[C] \subseteq [A]$. בפרט, $b[C] \subseteq [A] \cap S = A$.

($\Rightarrow$) יהיו $p \in B \in b$. תהי $q \in C$ כך ש $bC \subseteq A$. מרציפות כפל משמאל ב b ,
 $\overline{bC} \subseteq \overline{A}$. לסיכום, $bq \in \overline{A}$ ולכן $q \in [C] = \overline{C}$. מרציפות כפל מימין ב q ,
 $\overline{bC} \subseteq \overline{b\overline{C}} \subseteq \overline{A}$. כיון ש $p \in [B] = \overline{B}$, $pq \in \overline{A} = [A]$, כלומר $A \in pq$. ■

תרגיל 11: הוכח, בעזרת משפט האיפיון של מכפלה, שלכל $a, b \in S$ מתקיים $p_ap_b = p_{ab}$
 (כלומר, הכפל ab כאיברים של S וכעל-מסננים ראשיים נותן "אותה תוצאה").

משפט 3.22 (איפיון אידמפוטנט) יהיו S סמיחבורה ו $p \in \beta S$ אידמפוטנט. לכל $A \in p$ יש
 $a \in A$ כך ש:

יש $A' \subseteq A$ כך ש $aA' \subseteq A$.

יתר על כן:

1. קבוצת האיברים a בעלי תכונה זו, שייכת ל p .

2. אם p אינו ראשי, אז אפשר לדרוש ש $a \notin A'$.

3. האמור בסעיף (1) מאפיין את התכונה " p אידמפוטנט ב βS ".

הוכחה: (1) ממשפט האפיון, לכל $p = p^2$ יש $A \in p$ כך שלכל $a \in B$ יש $C \in p$ עם $aC \subseteq A$.
 נקבע $a \in B \cap A$, וניקח C המתאימה לו. אז $A' = C \cap A \in p$ מקיימת $aA' \subseteq A$ ו $A' \subseteq A$.

(2) אם p אינו ראשי, אז $\{a\} \notin p$ ולכן $\{a\}^c \in p$ ואפשר לקחת $A' = C \cap A \cap \{a\}^c = C \cap A \setminus \{a\}$.

(3) ממשפט האיפיון של מכפלה. ■

4 משפט הסכומים הסופיים של הינדמן

4.1 משפט הינדמן

הגדרה 4.1 תהי S סמיחבורה, ויהיו $a_1, a_2, \dots \in S$. $FP(a_1, a_2, \dots)$ היא קבוצת כל המכפלות הסופיות $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$ כך ש $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, n טבעי כלשהו. בפרט, $a_1, a_2, \dots \in FP(A)$.

נתבונן בסמיחבורה $\mathbb{N}$, עם פעולת החיבור. במקרה זה, כיון שהפעולה היא חיבור, יותר טבעי לכתוב $FS(A)$ (הסכומים הסופיים) במקום $FP(A)$.

משפט 4.2 (הינדמן) לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש מספרים טבעיים שונים $a_1, a_2, \dots$ כך ש $FS(a_1, a_2, \dots)$ מונוכרומטית.

זוהי הכללה מרחיקת לכת של משפט הצביעה של שור. שור שיער שמשפט הינדמן (Hindman) נכון, ומקרה פרטי של משפט הינדמן הוכח על ידי הילברט. הוכחתו המקורית של הינדמן היתה אלמנטרית, אך הינדמן עצמו הודה שהוא "אינו מבין אותה". ההוכחה הטבעית שנראה כאן, נמצאה על ידי גלוין (Galvin) וגלאזר. גלוין הבין שמספיק למצוא על-מסנן עם התכונה המצויינת במשפט איפיון האידמפוטנטים (3.22), וגלאזר הוכיח משפט איפיון זה.

כיון שבסמיחבורה $(\mathbb{N}, +)$ אין אידמפוטנטים, משפט הינדמן הוא מקרה פרטי של המשפט הבא.

משפט 4.3 (הינדמן) תהי S סמיחבורה אינסופית בלי אידמפוטנטים. לכל צביעה של אברי S במספר סופי של צבעים, יש $a_1, a_2, \dots \in S$ שונים, כך שהקבוצה (האינסופית) $FP(a_1, a_2, \dots)$ היא מונוכרומטית.

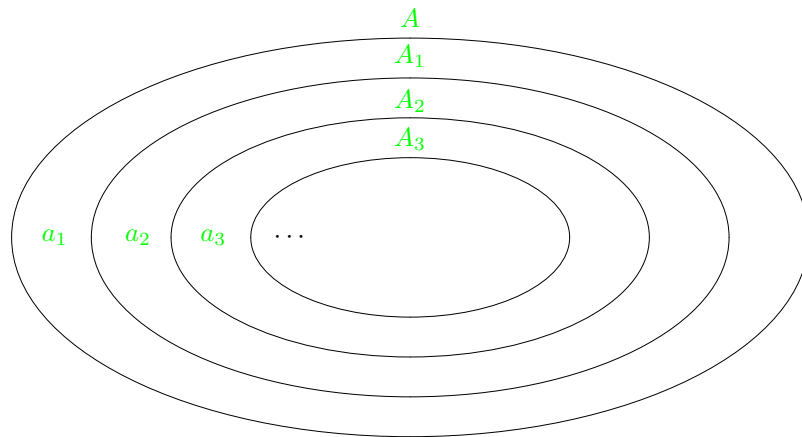
הוכחה: βS סחבקה, ולכן יש אידמפוטנט $p \in \beta S$. מהנתון, $p \notin S$, כלומר אינו ראשי. ההמשך דומה מאוד למקרה הראשון בהוכחת משפט רמזי האלמנטרית.

תהי נתונה צביעה של אברי S במספר סופי של צבעים. p על-מסנן על S , לכן יש ב p קבוצה מונוכרומטית A .

ממשפט איפיון האידמפוטנטים, יש $a_1 \in A$ וקבוצה $A_1 \in p$ כך ש $a_1 A_1 \subseteq A$.
שוב מהמשפט, יש $a_2 \in A_1$ וקבוצה $A_2 \in p$ כך ש $a_2 A_2 \subseteq A_1$.

באופן זה נבחר, לכל $n > 1$, $a_n \in A_{n-1}$ וקבוצה $A_n \in p$ כך ש $a_n A_n \subseteq A_{n-1}$.

נמחיש זאת באיור:



אזי $FP(a_1, a_2, \dots) \subseteq A$: נתבונן במכפלה $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$ כך ש $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. כל שורה ברשימה הבאה נובעת מזו שלפניה

$$\begin{aligned} a_{i_n} &\in A_{i_{n-1}} \\ a_{i_{n-1}} a_{i_n} &\in a_{i_{n-1}} A_{i_{n-1}} \subseteq A_{i_{n-2}} \\ a_{i_{n-2}} a_{i_{n-1}} a_{i_n} &\in a_{i_{n-2}} A_{i_{n-2}} \subseteq A_{i_{n-3}} \\ &\vdots \\ a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} &\in a_{i_1} A_{i_2} \subseteq A_{i_1} \subseteq A \end{aligned}$$

■

סבבה?

תרגיל 1: נסח והוכח, בעזרת משפט הקומפקטיות, גירסה סופית של משפט הינדמן.

נקבל בקלות את משפט הינדמן גם עבור מכפלות (במקום סכומים) של מספרים טבעיים.

משפט 4.4 (הינדמן) לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש מספרים טבעיים שונים $a_1, a_2, \dots$ כך ש $FP(a_1, a_2, \dots)$ מונוכרומטית.

הוכחה: צביעה כזו נותנת צביעה של הסמיחבורה $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \cdot)$, שבה אין אידמפוטנטים. נפעיל את המשפט הקודם.

■

הוכחת משפט הינדמן מראה למעשה את המשפט הבא.

משפט 4.5 יהי $p \in \beta S \setminus S$ אידמפוטנט. לכל $A \in p$ יש $a_1, a_2, \dots \in S$ שונים, כך ש $FP(a_1, a_2, \dots) \subseteq A$.

הגדרה 4.6 תהי S סמיחבורה. קבוצה המכילה קבוצה מהצורה $FP(a_1, a_2, \dots)$ כאשר $a_1, a_2, \dots \in S$ שונים תיקרא קבוצת FP . אם הפעולה על S מסומנת $+$, נכתוב FS במקום FP .

לכן, הוכחת משפט הינדמן מראה שכל איבר של אידמפוטנט לא ראשי ב βS הוא קבוצת FP .

"וגם חרבונו זכור לטוב"

משפט 4.7 לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש קבוצה מונוכרומטית שהיא גם קבוצת FS וגם קבוצת FP.

הוכחה: תהי

$$I = \{p \in \beta\mathbb{N} : \text{each } A \in p \text{ is an FS set}\}$$

$I \neq \emptyset$: ממשפט הינדמן, לכל אידמפוטנט $p = p + p$ בסמיחבורה $(\beta\mathbb{N}, +)$, $p \in I$.

I סגורה ב $\beta\mathbb{N}$: לכל $p \notin I$, תהי $A \in p$ שאינה קבוצת FS. אז $I \cap [A] = \emptyset$.

I סגורה לכפל: יהיו $p, q \in I$. תהי $A \in pq$. ממשפט האיפיון של מכפלה, יש $n \in B \in p$ ו $C \in q$ כך ש $nC \subseteq A$. יהיו $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{N}$ שונים כך ש $FS(c_1, c_2, \dots) \subseteq C$. מחוק הפילוג, תמיד $n(c_{i_1} + \dots + c_{i_m}) = nc_{i_1} + \dots + nc_{i_m}$ ולכן

$$A \supseteq n FS(c_1, c_2, \dots) = FS(nc_1, nc_2, \dots)$$

לכן, $pq \in I$! יש!

לכן, $(I, \cdot)$ תת-סחבקה של $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$. ניקח אידמפוטנט $p = p^2$ ב I .

תהי $A \in p$ מונוכרומטית עבור הצביעה הנתונה.

I זרה ל $\mathbb{N}$, ובפרט $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. ממשפט הינדמן, A קבוצת FP. כיון ש $p \in I$, גם A קבוצת FS. ■

הערה: המשפט האחרון אומר, שיש $k_1, k_2, \dots$ שונים, ויש $n_1, n_2, \dots$ שונים, כך שהקבוצה $FS(k_1, k_2, \dots) \cup FP(n_1, n_2, \dots)$ היא מונוכרומטית. אבל המשפט לא אומר שהסדרות שוות. הינדמן מצא צביעה קונקרטית של הטבעיים במספר סופי של צבעים (למעשה, 7 צבעים) כך שאין $k_1, k_2, \dots$ שונים שעבורם הקבוצה $FS(k_1, k_2, \dots) \cup FP(k_1, k_2, \dots)$ היא מונוכרומטית (אפילו אם מגבילים רק למכפלות וסכומים של שני איברים!). בעזרת עובדה זו, הינדמן הראה שאין על-מסנן על הטבעיים שמקיים $p + p = p \cdot p$.

4.2 הכללה של משפט הינדמן

בהוכחה שבפרק הקודם, דרשנו שאין אידמפוטנטים ב S כדי להבטיח ש $p \notin S$ יש מקרים טבעיים שבהם דרישה זו אינה מתקיימת, ואינה ניתנת לתיקון על ידי מעבר לתת-סמיחבורה. למשל, אם V מרחב וקטורי מעל שדה ממאפיין 2, אז בכל תת-סמיחבורה של $(V, +)$ נמצא וקטור מהצורה $\vec{0}$ ו $v + v = \vec{0}$ הוא אידמפוטנט. נראה שגם במקרה כזה, משפט הינדמן תקף.

כיון שהקבוצה $\{s\}$ פתוחה לכל $s \in S$, הקבוצה S פתוחה ב βS . לכן, $\beta S \setminus S$ סגורה ב βS ואם היא תת-סמיחבורה של βS , אז יש ב $\beta S \setminus S$ אידמפוטנט, ואפשר להפעיל את משפט הינדמן (4.5). נאפיין את התכונה המספיקה הזו בשפה של S .

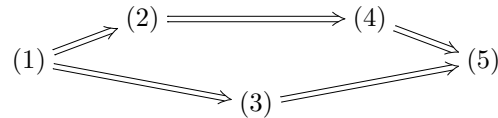
הגדרה 4.8 סמיחבורה S היא מזיזה אם S אינסופית, ולכל קבוצה סופית $F \subseteq S$ וקבוצה אינסופית $A \subseteq S$, יש $a_1, \dots, a_k \in A$ כך שלכל $s \in S$,

$$\{a_1 s, \dots, a_k s\} \not\subseteq F$$

פרט אולי למספר סופי של איברים $s \in S$.

חבורה היא סמיחבורה שבה יש איבר e עם התכונות הבאות: $se = es = s$ לכל s , ולכל s יש t כך ש $st = ts = e$.

למה 4.9 תהי S סמיחבורה. בין התכונות הבאות, מתקיימות הגרירות



1. S חבורה.

2. יש ב S צימצום משמאל: לכל $a, b, c \in S$, אם $ca = cb$ אז $a = b$.

3. יש ב S צימצום מימין: לכל $a, b, c \in S$, אם $ac = bc$ אז $a = b$.

4. כפל משמאל ב S הוא סופי-לאחד: לכל $a \in S$, L_a סופית-לאחד.

5. S מזיזה.

תרגיל 2: הוכח את הלמה.

תרגיל 3: איני יודע את התשובה לשאלה הבאה: תהי S סמיחבורה כך שכפל מימין ב S הוא סופי-לאחד (לכל $a \in S$, R_a סופית-לאחד). האם בהכרח S מזיזה?

משפט 4.10 תהי S סמיחבורה. התכונות הבאות שקולות:

1. $\beta S \setminus S$ תת-סמיחבורה של βS .

2. S מזיזה.

הוכחה: $(1 \Leftarrow 2)$ יהיו $p, q \in \beta S \setminus S$ ונניח ש $pq = s \in S$. אז $\{s\} \in pq$. ממשפט האיפיון של כפל, יש $A \in p$ ולכל $a \in A$ יש $B \in q$ כך ש $aB \subseteq \{s\}$. יהיו $a_1, \dots, a_k \in A$ ויהיו $B_1, \dots, B_k \in q$ כך ש $a_i B_i \subseteq \{s\}$ לכל i . ניקח $B = B_1 \cap \dots \cap B_k$. B אינסופית, ולכל $b \in B$ מתקיים

$$\{a_1 b, \dots, a_k b\} \subseteq \{s\}$$

לכן, S אינה מזיזה.

$(2 \Leftarrow 1)$ יהיו $F \subseteq S$ סופית ו $A \subseteq S$ אינסופית, כך שלכל $a_1, \dots, a_k \in A$ הקבוצה $B_{a_1, \dots, a_k} = \{s \in S : a_1 s, \dots, a_k s \in F\}$ אינסופית. לכל מספר סופי של קבוצות כמו זו האחרונה, חיתוכן שווה לקבוצה מאותה צורה, ולכן אינסופי. יהי איפוא $q \in \beta S \setminus S$ על-מסנן המכיל את כל הקבוצות האלה. כמו כן, כיון ש A אינסופית, יש $p \in \beta S \setminus S$ כך ש $A \in p$. נראה ש $F \in pq$, ולכן $pq \in S$. אכן, $A \in p$ ולכל $a \in A$ הקבוצה $B_a \in q$ ומתקיים $aB_a \subseteq F$. ממשפט האיפיון של הכפל, $F \in pq$. ■

פונקציה $f : X \rightarrow Y$ היא סופית-לאחד אם לכל $y \in Y$, קבוצת המקורות $f^{-1}(y)$ סופית.

ישירות מההגדרה, יוצא שכל תת-סמיחבורה אינסופית של סמיחבורה מזיזה, היא מזיזה.

מסקנה 4.11 תהי S סמיחבורה. אם יש ל S תת-סמיחבורה מזיזה, אז יש אידמפוטנט $p \in \beta S \setminus S$.

הוכחה: תהי T תת-סמיחבורה מזיזה של S . ממשפט 4.10, יש אידמפוטנט $p \in \beta T \setminus T$ יהי

$$p^\uparrow = \{A \subseteq S : \exists B \in p, A \supseteq B\}$$

הסגור של p כלפי מעלה. $p^\uparrow \in \beta S$. ממשפט האיפיון של אידמפוטנט (3.22), $p^\uparrow$ אידמפוטנט ב βS . כיון שכל אבריו אינסופיים (שכן $p \in \beta T \setminus T$), $p^\uparrow \in \beta S \setminus S$. ■

תרגיל 4: אם אין אידמפוטנטים ב S , אז יש ל S תת-סמיחבורה איזומורפית ל $\mathbb{N}$. בפרט, יש ל S תת-סמיחבורה מזיזה.

מסקנה 4.12 תהי S סמיחבורה. אם יש ל S תת-סמיחבורה מזיזה, אז לכל צביעה של אברי S במספר סופי של צבעים, יש $a_1, a_2, \dots \in S$ שונים כך שהקבוצה $\text{FP}(a_1, a_2, \dots)$ מונוכרומטית.

התרגיל הבא מסביר מדוע לא ניתן לדרוש, במסקנה שאחריו, שתת-המרחב U כולו מונו-כרומטי.

תרגיל 5: הראה שלכל מרחב וקטורי, יש צביעה של וקטוריו בשני צבעים כך שהתת-מרחב המונוכרומטי היחיד הוא $\{\vec{0}\}$.

מסקנה 4.13 יהי V מרחב וקטורי ממימד אינסופי מעל $\mathbb{Z}_2$. לכל צביעה של $V \setminus \{\vec{0}\}$ במספר סופי של צבעים, יש ל V תת-מרחב U ממימד אינסופי, כך שהקבוצה $U \setminus \{\vec{0}\}$ מונוכרומטית. בפרט, יש ל V תת-מרחב אפיני מונוכרומטי ממימד אינסופי.

הוכחה: $(V, +)$ חבורה. ממשפט 4.12, יש $v_1, v_2, \dots \in V$ שונים, כך ש $\text{FS}(v_1, v_2, \dots)$ מונוכרומטית.

כיון שהמרחב הוא מעל $\mathbb{Z}_2$, $\text{span}\{v_1, v_2, \dots\} = \text{FS}(v_1, v_2, \dots) \cup \{\vec{0}\}$. כיון שמרחב הנפרש על ידי קבוצה סופית מעל $\mathbb{Z}_2$ הוא סופי, המימד של $\text{span}\{v_1, v_2, \dots\}$ אינסופי.

לכל תת-מרחב U ממימד אינסופי, יהיו $v_1, v_2, \dots \in U$ בלתי תלויים לינארית. אז $v_1 +$ ■ $\text{span}\{v_2, v_3, \dots\} \subseteq U \setminus \{\vec{0}\}$ מרחב אפיני ממימד אינסופי.

4.3 קבוצות FP וצביעות שלהן

הוכחת משפט הינדמן מראה שכל איבר של אידמפוטנט לא ראשי הוא קבוצת FP. גם ההיפך נכון.

משפט 4.14 תהי S סמיחבורה מזיזה. לכל קבוצת FP, יש אידמפוטנט $p \in \beta S \setminus S$ שהקבוצה שייכת לו.

יתר על כן, לכל $a_1, a_2, \dots \in S$ שונים, יש אידמפוטנט $p \in \beta S \setminus S$ כך ש $\text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots) \in p$ לכל n .

הוכחה: לכל n , תהי $K_n = [\text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)] \subseteq \beta S$. K_n קומפקטית ולא ריקה, ולכן גם $K_n \setminus S$ מתקיים

$$\beta S \setminus S \supseteq K_1 \setminus S \supseteq K_2 \setminus S \supseteq \dots$$

מתכונת החיתוך הסופי, הקבוצה הקומפקטית

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \setminus S = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)] \setminus S$$

אינה ריקה.

K סגורה תחת פעולת הכפל של βS :

היו $p, q \in K$. בפרט, $p, q \notin S$ וכיון ש S מזיזה, $\beta S \setminus S$ סגורה לכפל, ולכן $pq \notin S$.
 נקבע n . נותר להראות ש $pq \in [\text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)]$ כלומר $pq \in \text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)$.
 נעשה זאת בעזרת משפט האפיון של הכפל. אכן, $pq \in \text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)$ ולכל $i_1 < \dots < i_k$ $a_{i_1} \dots a_{i_k} \in \text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)$ ומתקיים $a_{i_1} \dots a_{i_k} \cdot \text{FP}(a_{i_k+1}, a_{i_k+2}, \dots) \subseteq \text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)$

לכן, K סחבקה ויש אידמפוטנט $p \in K$. בפירוט, $p \notin S$ ו $p \in \text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)$ לכל n . ■

מסקנה 4.15 תהי S סמיחבורה מזיזה.

תהי $A \subseteq S$ קבוצת FP . לכל צביעה של אברי A במספר סופי של צבעים, יש קבוצת FP מונוכרומטית המוכלת ב A .

הוכחה: תהי A קבוצת FP . ניקח על-מסנן אידמפוטנטי $\beta S \setminus S$ כך ש $p \in \beta S \setminus S$ כד ש $A \in p$. כיון ש p על-מסנן, יש $C \supseteq B \in p$ מונוכרומטית. ממשפט הינדמן, קבוצת B קבוצת FP . ■

המשפט הבא חזק יותר. במשפט זה, היה אולי טבעי לנסות לחפש תת-סידרה של $a_1, a_2, \dots$ כך שכל המכפלות של מספר סופי של איברים מתוך התת-סידרה הן בעלות אותו הצבע. אבל זה לא תמיד אפשרי: ב $(\mathbb{N}, +)$, נצבע את האי-זוגיים באדום ואת הזוגיים בירוק. לכל תת-סידרה של האי-זוגיים, צבעם אדום, אבל סכום כל שניים מהם הוא ירוק (זוגי).

עבור קבוצות $I, J \subseteq \mathbb{N}$, $I < J$ פירושו $i < j$ לכל $i \in I, j \in J$. במילים אחרות, $\max I < \min J$.

משפט 4.16 תהי S סמיחבורה מזיזה.

היו $a_1, a_2, \dots \in S$ שונים. לכל צביעה של אברי $\text{FP}(a_1, a_2, \dots)$ במספר סופי של צבעים, יש קבוצות סופיות של אינדקסים $F_1, F_2, \dots \subseteq \mathbb{N}$ כך ש:

$$1. F_1 < F_2 < F_3 < \dots$$

$$2. \text{האיברים } s_n = \prod_{i \in F_n} a_i \text{ (נכפלים בסדר עולה) שונים זה מזה.}$$

$$3. \text{הקבוצה } \text{FP}(s_1, s_2, \dots) \text{ (שמוכלת ב } \text{FP}(a_1, a_2, \dots) \text{) היא מונוכרומטית.}$$

הוכחה: ניקח אידמפוטנט $p \in \beta S \setminus S$ כך ש $p \in \text{FP}(a_n, a_{n+1}, \dots)$ לכל n . נחזור על הוכחת משפט הינדמן, בשינויים קלים.

הצביעה משרה צביעה של $\text{FP}(a_1, a_2, \dots)$, ששייכת ל p , ולכן יש $A \in p$ מונוכרומטית.

$$\text{ניקח } s_1 = \prod_{i \in F_1} a_i \in A \text{ וקבוצה } A \setminus \{s_1\} \supseteq A_1 \in p \text{ כך ש } s_1 A_1 \subseteq A$$

יהי $n_1 = \max F_1$. $n_1 = \max F_1$ $A_1 \cap \text{FP}(a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots) \in p$ לכן אפשר להניח ש $A_1 \subseteq \text{FP}(a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots)$.

ניקח $s_2 = \prod_{i \in F_2} a_i \in A_1$ וקבוצה $s_2 = \prod_{i \in F_2} a_i \in A_1$ כך ש $s_2 A_2 \subseteq A_1$.

יהי $n_2 = \max F_2$. אפשר להניח ש $A_2 \subseteq \text{FP}(a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \dots)$.

ניקח $s_3 = \prod_{i \in F_3} a_i \in A_2$ וקבוצה $s_3 = \prod_{i \in F_3} a_i \in A_2$ כך ש $s_3 A_3 \subseteq A_2$.

יהי $n_3 = \max F_3$. אפשר להניח ש $A_3 \subseteq \text{FP}(a_{n_3+1}, a_{n_3+2}, \dots)$.

נמשיך באותו אופן.

כמו בסוף הוכחת משפט הינדמן, נקבל ש $\text{FP}(s_1, s_2, \dots) \subseteq A$ ולכן מונכרומטית. ■

תרגיל 6: הסק את המשפט האחרון תחת ההנחה היותר כללית, שיש לסידרה $a_1, a_2, \dots$ תת-סידרה שיוצרת תת-סמיחבורה מזיזה.

אם, במסקנה הבאה, לא נדרוש שהקבוצות F_n זרות זו לזו, המסקנה תהפוך טריואלית: בכל שרשרת אינסופית עולה של קבוצות אפשר למצוא תת-שרשרת אינסופית מונכרומטית, והיא (כמו כל שרשרת) סגורה לפעולת האיחוד $\cup$.

מסקנה 4.17 לכל צביעה של אברי $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ במספר סופי של צבעים, יש קבוצות סופיות שונות $F_1, F_2, \dots \subseteq \mathbb{N}$ כך ש $F_1 < F_2 < \dots$ וכל הקבוצות

$$F_{i_1} \cup F_{i_2} \cup \dots \cup F_{i_m}$$

כך ש $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ הן בעלות אותו צבע.

הוכחה: הסמיחבורה $([\mathbb{N}]^{<\infty}, \cup)$ היא מזיזה, ומתקיים $\text{FP}(\{1\}, \{2\}, \dots) = [\mathbb{N}]^{<\infty}$ נפעיל את המשפט האחרון. ■

בדומה לתרגיל לעיל, קל לראות שלא ניתן להחליף את $\cup$ ב $\cap$ במסקנה האחרונה. זה לא שותר דבר, כיון שהסמיחבורה $([\mathbb{N}]^{<\infty}, \cap)$ אינה מזיזה.

4.4 משפט על פתרונות של מערכות אי-שיוויונים פולינומיים

הגדרה 4.18 חוג הוא מבנה $(R, +, \cdot)$ כך ש $(R, +)$ חבורה קומוטטיבית, $(R, \cdot)$ סמיחבורה עם יחידה (מונואיד), ומתקיים חוק הפילוג:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ (b+c)a &= ba+ca \end{aligned}$$

לכל $a, b, c \in R$. פיוס (ב x) מעל R הוא ביטוי מהצורה $a_1 x^{d_1} a_2 x^{d_2} \dots a_m x^{d_m} a_{m+1}$ כאשר $a_1, \dots, a_{m+1} \in R$ ו $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}$. הפעלה של מונום היא סכום חזקות x המופיעות בו. פולינום (ב x) מעל R הוא סכום של מונומים ב x מעל R . הפעלה של פולינום היא המעלה המקסימלית של מונום המופיע בו. $R[x]$ הוא אוסף הפולינומים ב x מעל R .

אם הכפל בחוג הוא קומוטטיבי, אז לכל מונום יש הצורה ax^d , ולכן מושג הפולינום מתלכד עם המושג המוכר לנו במקרה של שדה. דוגמא לחוג שבו הכפל אינו קומוטטיבי היא חוג המטריצות הריבועיות $n \times n$ מעל שדה כלשהו.

כפל של מונומים הוא מונום, וסכום של פולינומים הוא פולינום. מתכונת הפילוג בחוג R , כפל פולינומים הוא פולינום ולכן גם $R[x]$ חוג.

הגדרה 4.19 מערכת אי-שוויונים פולינומיים מעל חוג R היא מערכת

$$\begin{cases} f_1(x) \neq g_1(x) \\ f_2(x) \neq g_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \neq g_m(x) \end{cases}$$

כך ש $f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_m(x) \in R[x]$. פתרון למערכת כזו הוא איבר $a \in R$ שמקיים את כל האי-שוויונים שבמערכת $(f_i(a) \neq g_i(a))$ לכל i .

כל מערכת אי-שוויונים פולינומיים אפשר להביא לצורה

$$\begin{cases} f_1(x) \neq 0 \\ f_2(x) \neq 0 \\ \vdots \\ f_m(x) \neq 0 \end{cases}$$

כך ש $f_1(x), \dots, f_m(x) \in R[x]$: נמיר כל אי-שוויון $f_i(x) \neq g_i(x)$ באי-שוויון $f_i(x) - g_i(x) \neq 0$. לכן, בהמשך נדבר רק על מערכות ממושטות כאלה.

בחוג האינסופי $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, עם חיבור וכפל רכיב-רכיב, יש אי-שוויון בלי פתרון: $x^2 \neq x$. נראה, בכל אופן, שאם יש פתרון למערכת אי-שוויונים פולינומיים בחוג אינסופי, אז יש למערכת פתרונות רבים.

למה 4.20 יהי $f(x) \in R[x]$ פולינום ממעלה n .

לכל קבוע $a \in R$, יש $g(x) \in R[x]$ ממעלה קטנה מ n , כך ש $f(a+x) = f(x) + g(x)$.

הוכחה: פתיחת סוגריים.

תרגיל 7: הוכח את הלמה האחרונה.

הגדרה 4.21 $\text{FS}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ היא קבוצת כל הסכומים הסופיים $a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$ כך ש $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ טבעי כלשהו.

למה 4.22 (זלניוק-פרוטסוב) יהי $f(x) \in R[x]$ פולינום ממעלה n .

אם יש $a_1, \dots, a_{n+1} \in R$ כך שלכל $a \in \text{FS}(a_1, \dots, a_{n+1})$ מתקיים $f(a) = 0$, אז $f(0) = 0$.

הוכחה: באינדוקציה על n (מעלת $f(x)$).

$n = 1$: מהטענה הקודמת, יש $c = g(x) \in R[x]$ ממעלה קטנה מ 1 (כלומר, קבוע) כך ש

$$f(a_1 + x) = f(x) + g(x) = f(x) + c$$

נציב את a_2 לקבל $c = f(a_2) + c = f(a_2) = 0$. לכן, $f(a_1 + x) = f(x)$. נציב את 0 לקבל $0 = f(a_1) = f(0)$.

$n > 1$: יהי $g(x) \in R[x]$ ממעלה קטנה מ n , כך ש $f(a_1 + x) = f(x) + g(x)$. לכל $a \in \text{FS}(a_2, \dots, a_n)$

$$0 = f(a_1 + a) = f(a) + g(a) = 0 + g(a) = g(a)$$

מהנחת האינדוקציה, $g(0) = 0$ ולכן $g(0) = f(0) + g(0) = f(0)$ ולכן $0 = f(a_1) = f(a_1 + 0) = f(0) + g(0) = f(0)$.
 הושלמה הוכחת הטענה. ■

משפט 4.23 (זלניוק-פרוטסוב) יהי R חוג אינסופי, ותהי נתונה מערכת אי-שיוויונים פולינומיים ב- R . אם יש למערכת פתרון, אז יש לה אינסוף פתרונות. יתר על כן, לכל פתרון a_0 של המערכת, קבוצת הפתרונות שלה היא מהצורה $a_0 + A$, כאשר A היא קבוצת FS.

הוכחה: יהיו $f_1(x), \dots, f_m(x) \in R[x]$ הפולינומים במערכת האי-שיוויונים, ותהי F קבוצת הפתרונות של מערכת האי-שיוויונים. מהנתון, F אינה ריקה. נקבע $a_0 \in F$. נתבונן במערכת האי-שיוויונים הפולינומיים החדשה

$$\begin{cases} f_1(a_0 + x) \neq 0 \\ f_2(a_0 + x) \neq 0 \\ \vdots \\ f_m(a_0 + x) \neq 0 \end{cases}$$

תהי F' קבוצת הפתרונות של המערכת החדשה. אזי $a_0 + F' = F$, ולכן $0 \in F'$. נניח, על דרך השלילה, ש- F' אינה קבוצת FS. נניח איפוא, בלי הגבלת הכלליות, שזה המצב כבר במערכת המקורית, כלומר: $0 \in F$ ו- F אינה קבוצת FS.

עבור $f(x) \in R[x]$, נסמן $f^{-1}(0) = \{a \in R : f(a) = 0\}$. מהגדרת F ,

$$f_1^{-1}(0) \cup \dots \cup f_m^{-1}(0) = R \setminus F$$

אז $R = f_1^{-1}(0) \cup \dots \cup f_m^{-1}(0) \cup F$. $R = (R, +)$ חבורה חיבורית, ולכן ממשפט הינדמן אחת הקבוצות באיחוד היא קבוצת FS. כיון ש- F אינה קבוצת FS, יש i כך ש- $f_i^{-1}(0)$ היא קבוצת FS. מלמה 4.22, $0 \in f_i^{-1}(0)$ ולכן $0 \notin F$, בסתירה להנחה על F . ■

תרגיל 8: הוכח שבאופן כללי, לא ניתן לדרוש במשפט האחרון שקבוצת הפתרונות היא קבוצת FS.

הדרכה: התבונן באי-שיוויון $x^2 \neq x$ מעל החוג $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, עם חיבור וכפל רכיב-רכיב.

נסיים את הפרק בתיאור קשר לאלגברה טופולוגית. יהי R חוג. טופולוגיה על חוג R היא טופולוגיה על הקבוצה R כך שהפעולות של חיבור, נגדי, וכפל הן רציפות. על כל חוג אפשר להגדיר את הטופולוגיה הדיסקרטית, אך טופולוגיה זו אינה מעניינת. קבוצה $A \subseteq R$ היא אלגברית אם היא איחוד של מספר סופי של קבוצות מהצורה

$$Z(f) := \{a \in R : f(a) = 0\}$$

כאשר $f(x) \in R[x]$ פולינום. כיון שקבוצת האפסים של כל פולינום היא סגורה, כל קבוצה אלגברית בחוג היא סגורה בכל טופולוגיה על R . אוסף הקבוצות המשלימות לקבוצות אלגבריות מקיימות כמעט את כל האקסיומות של טופולוגיה, אולם לעתים קרובות הן לא מקיימות את תכונת האוסדורף.

לאור האמור לעיל, אם נקודה כלשהי ב- R היא פתרון יחיד למערכת אי-שיוויונים פולינומיים, אז כל נקודה ב- R היא פתרון יחיד למערכת אי-שיוויונים פולינומיים מתאימה, ולכן כל טופולוגיה על R היא דיסקרטית.

מרקוב (Markov) הוכיח, עבור חוגים בני מניה, את הכיוון ההפוך: אם 0 אינה פתרון יחיד למערכת אי-שיוויונים פולינומיים, אז יש טופולוגיה לא דיסקרטית על R . לא נוכיח משפט לא פשוט זה, אך נשים לב שיחד עם משפט 4.23, שעל כל חוג אינסופי בן מניה יש טופולוגיה לא דיסקרטית. מסקנה זו הוכחה, בשיטות ישירות אך מורכבות יותר, על ידי ארנאוטוב.

5 משפט ואן דר וארדן

5.1 אידיאלים בסמיחבורות

הגדרה 5.1 תהי S סמיחבורה.

קבוצה לא ריקה $L \subseteq S$ היא אידיאל שמאלי (של S) אם $SL \subseteq L$, כלומר: לכל $s \in S$ מתקיים $sL \subseteq L$.

L היא אידיאל שמאלי מיינימלי (של S) אם אין אידיאל שמאלי של S המוכל ממש ב L . איבר של אידיאל שמאלי מיינימלי ייקרא איבר מיינימלי.

קבוצה לא ריקה $I \subseteq S$ היא אידיאל (של S) אם $IS, SI \subseteq I$.

תרגיל 1: תהי S סמיחבורה. הוכח את הטענות הבאות:

1. כל אידיאל שמאלי של S הוא תת-סמיחבורה של S .
2. לכל איבר מיינימלי $a \in S$, Sa אידיאל שמאלי מיינימלי.

למה 5.2 תהי S סמיחבורה.

1. אם a איבר מיינימלי, אז לכל $b \in S$, גם ba מיינימלי.
2. לכל $a \in S$, Sa אידיאל שמאלי.
3. לכל אידיאל שמאלי מיינימלי L ולכל $a \in L$ מתקיים $Sa = L$.
4. אם S סחבקה, אז כל אידיאל שמאלי מיינימלי ב S הוא קומפקטי.

הוכחה: (1) יהי L אידיאל שמאלי מיינימלי המכיל את a . אז $ba \in L$.

$$SSa \subseteq Sa \quad (2)$$

$$Sa \subseteq L, L \text{ ממינימליות } L, Sa = L \quad (3)$$

(4) מ (3), לאידיאל השמאלי המיינימלי יש הצורה Sa . כיון שכפל מימין ב a הוא פונקציה רציפה ו S קומפקטית, גם Sa קומפקטית. ■

למה 5.3 תהי S סחבקה. כל אידיאל שמאלי מכיל אידיאל שמאלי מיינימלי, ובפרט מכיל איבר מיינימלי.

הוכחה: יהי L אידיאל שמאלי. נקבע $a \in L$. אז $Sa \subseteq L$ אידיאל שמאלי קומפקטי.

נתבונן במשפחת כל האידיאלים השמאליים הקומפקטיים המוכלים ב Sa , סדורה על ידי הכלה. מתכונת החיתוך הסופי של קבוצות קומפקטיות, משפחה זו מקיימת את תנאי הלמה של צורן. לכן, יש במשפחה איבר מיינימלי M .

יהי $I \subseteq M$ אידיאל שמאלי. נקבע $b \in I$. אז $Sb \subseteq I \subseteq M$ ו Sb אידיאל שמאלי קומפקטי. לכן, $Sb = I = M$, ולכן M אידיאל שמאלי מיינימלי. ■

"אם אתה מאמין שיכולים לקלקל, תאמין שיכולים לתקן" (רבי נחמן מברסלב)

למה 5.4 (למת התיקון) יהי $a \in S$. התכונות הבאות שקולות:

1. a מינימלי.

2. לכל $b \in S$, יש $c \in S$ כך ש $cba = a$.

הוכחה: ($2 \Leftarrow 1$) יהי L אידיאל שמאלי מינימלי כך ש $a \in L$. כיון ש L אידיאל שמאלי, $ba \in L$ ולכן $L = Sba$. $a \in L$ ולכן יש $c \in S$ כך ש $cba = a$.

($1 \Leftarrow 2$) Sa אידיאל שמאלי. יהי $L \subseteq Sa$ אידיאל שמאלי. ניקח $ba \in L$. מהנתון, יש c כך ש $a = cba \in L$ ולכן $Sa \subseteq L$ ולכן $L = Sa$. אז Sa אידיאל שמאלי מינימלי, ו $a \in L = Sa$. ■

למה 5.5 (פורסטנברג) אם S סחבקה ו a איבר מינימלי של S , אז לכל תת־סחבקה T של S כך ש $a \in T$, גם איבר מינימלי של T .

הוכחה: יהי $t \in T$. נראה שאפשר לתקן את ta על ידי איבר של T .

Tta אידיאל שמאלי קומפקטי של T , ובפרט סחבקה. יהי $b \in Tta$ אידימפוטנט. יהי $t' \in T$ כך ש $b = t'ta$. מלמת התיקון, יש $c \in S$ כך ש $cb = ct'ta = a$. אז

$$(at')(ta) = a(t'ta) = (cb)b = cb^2 = cb = a$$

ו $at' \in T$. ■

למה 5.6 יהי I אידיאל. לכל איבר מינימלי a מתקיים $a \in I$.

הוכחה: יהי $b \in I$. מלמת התיקון, יש $c \in S$ כך ש $cba = a$. $a \in I$. ■

תהי S סמיחבורה. לשם נוחות ויזואלית, נציג איברים של S^m כעמודות. הפעולה של S^m מוגדרת רכיב־רכיב:

$$\cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ a_m b_m \end{pmatrix}$$

איברים של S^m ייוצגו, בדרך כלל, על ידי אותיות עבות: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$

למה 5.7 (פורסטנברג) יהי $a \in S$ איבר מינימלי. אזי

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$$

מינימלי ב S^m .

הוכחה: מלמת התיקון, מספיק להוכיח שלכל $\mathbf{b} \in S^m$ יש $\mathbf{c} \in S^m$ כך ש $\mathbf{cba} = \mathbf{a}$. אכן, אם נכתוב

$$, \mathbf{ba} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a \\ \vdots \\ b_m a \end{pmatrix}$$

אז מלמת התיקון, לכל $i = 1, \dots, m$ יש $c_i \in S$ כך ש $c_i b_i a = a$. יהי

$$.\mathbf{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

אזי

$$.\mathbf{cba} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 a \\ \vdots \\ b_m a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 b_1 a \\ \vdots \\ c_m b_m a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

■

הגדרה 5.8 תהי S סחבקה. טופולוגית המכפלה על S^m היא זו שהקבוצות

$$, U_1 \times \dots \times U_m$$

כאשר $U_1, \dots, U_m \subseteq S$ פתוחות בסיסיות, מהוות בסיס עבורה. לשם נוחות ויזואלית, נציג איברים של S^m כעמודות. הפעולה של S^m מוגדרת רכיב-רכיב:

$$\cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ a_m b_m \end{pmatrix}$$

איברים של S^m ייוצגו, בדרך כלל, על ידי אותיות עבות: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$.

תרגיל 2: $(S^m, \cdot)$ היא סחבקה.

5.2 משפט ואן דר וארדן

המשפט הבא, של ואן דר וארדן (van der Waerden), מוכיח השערה של שור.

משפט 5.9 (ואן דר וארדן) לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש סדרות חשבוניות מונוכרומטיות מכל אורך סופי.

הוכחת משפט זה פרושה על פני התת-פרק הנוכחי ולמעשה גם הקודם. הוכחה זו, של ברגלסון (Bergelson) היא גירסת על-מסננים של הוכחה של פורסטנברג, שניתנה במקור בשפה של מערכות דינמיות.

נקבע אורך m כרצוננו עבור הסידרה החשבונית הרצויה. אנו כבר מנוסים באיסטרטגיה הבסיסית: כדי למצוא סידרה חשבונית מונוכרומטית מאורך m , מחפשים $p \in \beta S$ כך

שלכל $p \in A$, מכילה סדרה חשבונית מאורך m . כלומר, דרושים $a, d \in \mathbb{N}$ כך ש
 $a, a + d, \dots, a + (m - 1)d \in A$ או במילים אחרות,

$$\begin{pmatrix} a \\ a + d \\ \vdots \\ a + (m - 1)d \end{pmatrix} \in [A]^m$$

הקבוצה $[A]^m$ היא סביבה של

$$\begin{pmatrix} p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix}$$

בטופולוגיה המכפלה על $(\beta\mathbb{N})^m$.

נגדיר שתי תת-קבוצות של $\mathbb{N}^m$, שהן בפרט תת-קבוצות של $(\beta\mathbb{N})^m$:

$$\begin{aligned} \text{AP} &:= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a + d \\ \vdots \\ a + (m - 1)d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{N} \right\} \\ \text{AP}_0 &:= \text{AP} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

בהוכחת הלמה הבאה, נשתמש בעובדה שבתרגיל הבא.

תרגיל 3: הוכח שלכל $s \in \mathbb{N}^m$, הפונקציה על $(\beta\mathbb{N})^m$, המוגדרת על ידי $q \mapsto s + q$, היא רציפה.

למה 5.10 $\overline{\text{AP}_0}$ תת-סחבקה של $(\beta\mathbb{N})^m$.

הוכחה: סכום סדרות חשבוניות היא סדרה חשבונית, ולכן AP_0 תת-סמיחבורה של $\mathbb{N}^m$. הרחבת הטענה ל $\overline{\text{AP}_0}$ נובעת מרציפות, והיא סטנדרטית:

יהיו $p, q \in \overline{\text{AP}_0}$. יש להראות ש $p + q \in \overline{\text{AP}_0}$, כלומר כל סביבה של $p + q$ חותכת את AP_0 . תהי U סביבה של $p + q$. מרציפות החיבור מימין, יש סביבה V של p כך ש $V + q \subseteq U$. לכן יש $p \in \overline{\text{AP}_0}$.

$$s = \begin{pmatrix} a \\ a + d \\ \vdots \\ a + (m - 1)d \end{pmatrix} \in V \cap \text{AP}_0$$

ובפרט

$$s + q \in U$$

מרכיפות חיבור איבר קבוע של $\mathbb{N}^m$ משמאל, יש סביבה W של q כך ש

$$s + W \subseteq U$$

$q \in \overline{AP_0}$, לכן יש

$$t = \begin{pmatrix} b \\ b+e \\ \vdots \\ b+(m-1)e \end{pmatrix} \in W \cap AP_0$$

ובפרט

$$\begin{pmatrix} a+b \\ a+b+(d+e) \\ \vdots \\ a+b+(m-1)(d+e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+d \\ \vdots \\ a+(m-1)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b+e \\ \vdots \\ b+(m-1)e \end{pmatrix} \in U$$

■

וזו סידרה ב $U \cap AP_0$. בפרט, החיתוך אינו ריק.

למה 5.11 יהי $p \in \beta\mathbb{N}$ ונסמן

$$p = \begin{pmatrix} p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix}$$

1. כל סביבה של p מכילה סביבה מהצורה $[A]^m$, עם $A \in p$.

2. $p \in \overline{AP_0}$.

הוכחה: (1) לכל סביבה בסיסית $[A_1] \times \dots \times [A_m]$ של p , $A_1, \dots, A_m \in p$. ניקח $A = A_1 \cap \dots \cap A_m$. אז $p \in [A]^m \subseteq [A_1] \times \dots \times [A_m]$.

(2) מספיק לבדוק סביבות מהצורה שב (1). כיון ש $A \in p$, יש $a \in A$. אז

$$a = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \in [A]^m \cap AP_0$$

■

למה 5.12 $\overline{AP}$ אידיאל של $\overline{AP_0}$.

■

הוכחה: דומה להוכחת (1) בלמה הקודמת.

תרגיל 4: הוכח את הלמה האחרונה.

למה 5.13 יהי $p \in \beta\mathbb{N}$ מינימלי. אזי

$$p := \begin{pmatrix} p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix} \in \overline{AP}$$

הוכחה: נאסוף יחד את התוצאות שהוכחנו בפרק זה: מהמשפט של פורסטנברג (5.7), p מינימלי ב $(\beta\mathbb{N})^m$. כיון ש $p \in \overline{AP_0}$, הוא מינימלי גם בתת-סחבקה זו. $\overline{AP}$ אידיאל ב $\overline{AP_0}$, ולכן האיבר המינימלי p שייך לו (למה 5.6). ■

קעת נוכל לסיים את הוכחת משפט ואן דר וארדן: בהינתן צביעה של הטבעיים, ניקח p מינימלי, וניקח $A \in p$ מונוכרומטית. מהלמה האחרונה, $p \in \overline{AP}$, ולכן הסביבה $[A]^m$ של p חותכת את AP , כלומר יש

$$\begin{pmatrix} a \\ a+d \\ \vdots \\ a+(m-1)d \end{pmatrix} \in [A]^m$$

עם $a, d \in \mathbb{N}$. אז $a, a+d, \dots, a+(m-1)d \in A$ ולכן הסידרה החשבונית הזו מונוכרומטית.

תרגיל 5: מצא צביעה של המספרים הטבעיים בשני צבעים, כך שאין סידרה חשבונית מונוכרומטית אינסופית.

תרגיל 6: נסח, והוכח בעזרת משפט הקומפקטיות, גירסה סופית למשפט ואן דר וארדן.

הוכחת משפט ואן דר וארדן מראה שלכל $p \in \beta\mathbb{N}$ מינימלי ב $(\beta\mathbb{N}, +)$, כל $A \in p$ מכיל סדרות חשבוניות מכל אורך. באותו אופן, נקבל שאם p מינימלי ב $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$, אז כל $A \in p$ מכיל סדרות הנדסיות מכל אורך. המשפט הבא חזק יותר.

משפט 5.14 (ברגלסון-הינדמן) לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש צבע שבו יש סדרות חשבוניות מכל אורך וגם סדרות הנדסיות מכל אורך.

הוכחה: דומה להוכחת משפט הינדמן הסימולטני: נאמר שקבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ היא קבוצת AP אם יש סדרות חשבוניות מכל אורך ב A .

$$L = \{p \in \beta\mathbb{N} : \text{each } A \in p \text{ is an AP set}\}$$

$L \neq \emptyset$: הוכחנו שכל איבר $p \in \beta\mathbb{N}$ שהוא מינימלי ביחס לחיבור, שייך ל L .

קל לראות ש L אידיאל שמאלי של $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$. לכן, יש ב L איבר מינימלי p לגבי כפל.

תהי $A \in p$ מונוכרומטית. ממינימליות p , הקבוצה A מכילה סדרות הנדסיות מכל אורך. כיון ש $p \in L$, הקבוצה A מכילה סדרות חשבוניות מכל אורך. ■

תרגיל 7: השלם את הוכחת המשפט האחרון: הראה ש L אידיאל שמאלי של $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.

תרגיל 8: הוכח שאפשר לדרוש במשפט, שבאותו צבע יש, בנוסף לסדרות החשבוניות וההנדסיות מכל אורך, גם קבוצת FP וגם קבוצת FS.

הדרכה: בהוכחת המשפט האחרון, דרוש בהגדרת L שכל A היא AP וגם FS. קח שם אידיאל שמאלי מינימלי של $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$, ובתוכו אידמפוטנט כפלי.

6 משפט היילס-ג'ואט

6.1 צביעות של הסמיחבורה החופשית

הגדרה 6.1 בכל הפרק הנוכחי, F תהיה קבוצה סופית לא ריקה. נחשוב על אברי F כאותיות. מילה מעל F היא סידרה סופית של אותיות מ F .

השירשור של מילים $u = a_1 a_2 \dots a_m, w = b_1 b_2 \dots b_k$ מעל F הוא המילה $uw = a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_k$.

בכל הפרק, Σ תציין את קבוצת כל המילים מעל F . עם פעולת השירשור, היא הסמיחבורה החופשית על F .

עבור משתנה x, Σ_x תציין את הסמיחבורה החופשית על $F \cup \{x\}$.

מילה $w(x) = w_1 w_2 \dots w_k \in \Sigma_x \setminus \Sigma$ היא כזו שלפחות אחת מאותיותיה w_i היא המשתנה x . אפשר להציב במשתנה x כל אות מ F ולקבל מילה ב Σ . למשל, אם $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ ו

$$w(x) = 103x545xx43,$$

אז

$$w(1) = 10315451143$$

$$w(2) = 10325452243$$

$$w(3) = 10335453343$$

כולן מילים ב Σ .

ההוכחה הבאה, של פורסטנברג, למשפט של היילס (Hales) וג'ואט (Jewett), דומה להפליא להוכחת משפט ואן דר וארדן, ולכן מהווה גם חזרה מצויינת עליה.

משפט 6.2 (היילס-ג'ואט) לכל קבוצה סופית לא ריקה $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$, ולכל צביעה של אברי Σ במספר סופי של צבעים, יש מילה $w(x) \in \Sigma_x$, שהמשתנה x מופיע בה, כך שלכל המילים $w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_m)$ יש אותו צבע.

הוכחה: יהי p איבר מינימלי ב $\beta\Sigma$. תהי $A \in p$ מונוכרומטית. נראה שיש $w(x) \in \Sigma_x \setminus \Sigma$ כך ש

$$w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_m) \in A$$

יהי

$$\mathbf{p} := \begin{pmatrix} p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix} \in (\beta\Sigma)^m$$

מהלמה של פורסטנברג (5.7), $\mathbf{p}$ מינימלי בכל תת-סחבקה של $(\beta\Sigma)^m$ שהוא איבר בה. הקבוצה

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} w(a_1) \\ w(a_2) \\ \vdots \\ w(a_m) \end{pmatrix} : w(x) \in \Sigma_x \right\}$$

היא תת-סמיחבורה של Σ^m , ומשיקולי רציפות, $\bar{T}$ היא תת-סמיחבורה של $(\beta\Sigma)^m$.
לכל $w \in \Sigma$, הוקטור הקבוע

$$, \mathbf{w} := \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix} \in T$$

ולכן $\bar{T}$ $\mathbf{p} \in \bar{T}$ לסיכום, $\mathbf{p}$ מינימלי ב $\bar{T}$.
הקבוצה

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} w(a_1) \\ w(a_2) \\ \vdots \\ w(a_m) \end{pmatrix} : w(x) \in \Sigma_x \setminus \Sigma \right\}$$

היא אידיאל של T , ולכן משיקולי רציפות, $\bar{I}$ אידיאל של $\bar{T}$. לכן, $\mathbf{p} \in \bar{I}$ (למה 5.6).
כיון ש $A \in p$ יש

$$, \begin{pmatrix} w(a_1) \\ \vdots \\ w(a_m) \end{pmatrix} \in [A]^m \cap I$$

■

כלומר $w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_m) \in A$ ו $w(x) \in \Sigma_x \setminus \Sigma$

תרגיל 1: הוכח את הטענות הבאות, הנזכרות בהוכחה האחרונה:

א. $\bar{T}$ היא תת-סמיחבורה של $(\beta\Sigma)^m$.

ב. $\bar{I}$ אידיאל של $\bar{T}$.

יתרת הפרק מוקדשת כולה ליישומים של משפט היילס-ג'ואט.

6.2 משפט גלאי

קל לקבל את משפט ואן דר ווארדן ממשפט היילס-ג'ואט: תהי נתונה צביעה c של הטבעיים במספר סופי של צבעים, ונניח שאנו מחפשים סידרה חשבונית מונוכרומטית מאורך m . ניקח $F = \{1, \dots, m\}$, ונגדיר צביעה של הסמיחבורה החופשית Σ מעל F :

$$\chi(s_1 s_2 \dots s_k) := c(s_1 + s_2 + \dots + s_k)$$

לכל $s_1, s_2, \dots, s_k \in F$. במילים פשוטות, הצבע של $s_1 s_2 \dots s_k$ הוא הצבע (המקורי) של $s_1 + s_2 + \dots + s_k$.

ממשפט היילס-ג'ואט, יש מילה $w(x) = w_1 w_2 \dots w_k$ מעל $\{1, \dots, m, x\}$ ש x מופיע בה, נאמר $1 \leq d$ פעמים, כך שלמילים $w(1), \dots, w(m)$ אותן צבע. לכל $j = 1, \dots, m$, הצבע של $w(j)$ הוא הצבע המקורי של

$$, \sum_{\substack{i=1 \\ w_i \neq x}}^k w_i + \sum_{\substack{i=1 \\ w_i = x}}^k j = a + jd$$

כאשר a הוא הסכום של האותיות הקבועות (השונויות מ x) במילה $w(x)$. לכן, הסידרה החשבונית $a + d, a + 2d, \dots, a + md$ היא מונוכרומטית.

תרגיל 2: הוכח שלכל סידרה $d_1, d_2, \dots$ של מספרים טבעיים, לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, ולכל מספר טבעי m , יש $d \in FS(d_1, d_2, \dots)$ וסידרה חשבונית מונוכרומטית מאורך m , שהפרש שלה הוא d .

הדרכה: בדומה לטיעון הקודם, הגדר $\chi(s_1 s_2 \dots s_k) := c(d_1 s_1 + d_2 s_2 + \dots + d_k s_k)$ עדכון קל של רעיון זה נותן את המשפט הבא של גלאי (Gallai).

הגדרה 6.3: יהי n מספר טבעי, ותהי $F \subseteq \mathbb{N}^n$. קבוצה מהצורה $a + dF$ כאשר $a \in \mathbb{N}^n \cup \{0\}$ ו d טבעי, תיקרא עותק הומוטטי של F .

במילים אחרות, עותק הומוטטי הוא עותק של הקבוצה המקורית, עד כדי ניפוח על ידי כפל בקבוע והזזה, ובלי עיוות.

המשפט הבא אומר שלכל צביעה של הנקודות ב"מרחב ה n מימדי הבדיד" $\mathbb{N}^n$ במספר סופי של צבעים, אפשר למצוא ב $\mathbb{N}^n$ עותק הומוטטי מונוכרומטי של כל תבנית רצויה. למשל, במקרה $n = 2$, הוא אומר שלכל קבוצה סופית של איברים ב"מישור הבדיד" $\mathbb{N}^2$ ולכל צביעה של המישור הבדיד במספר סופי של צבעים, אפשר למצוא "עותק" מונוכרומטי של F .

משפט 6.4 (גלאי): יהי n מספר טבעי. תהי $F \subseteq \mathbb{N}^n$ קבוצה סופית. לכל צביעה של אברי $\mathbb{N}^n$ במספר סופי של צבעים, יש $a \in \mathbb{N}^n \cup \{0\}$ ו d טבעי, כך שהקבוצה $a + dF$ מונוכרומטית.

הוכחה: תהי Σ הסמיחבורה החופשית מעל F . בהנתן צביעה של $\mathbb{N}^n$, נגדיר צביעה של Σ : לכל $u_1, u_2, \dots, u_k \in F$, הצבע של $u_1 u_2 \dots u_k$ הוא הצבע (המקורי) של

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k$$

ממשפט היילס-ג'ואט, יש $w_1, w_2, \dots, w_k \in \Sigma_x$ כך שיש (נאמר $1 \leq d$) אינדקסים i עבורם w_i הוא המשתנה x , וכך שעבור המילה

$$w(x) = w_1 w_2 \dots w_k$$

הקבוצה $\{w(u) : u \in F\}$ היא מונוכרומטית. לכל $u \in F$, הצבע של $w(u)$ הוא הצבע המקורי של

$$\sum_{\substack{i=1 \\ w_i \neq x}}^k w_i + \sum_{\substack{i=1 \\ w_i = x}}^k u = a + du$$

כאשר a הוא סכום ה w_i שאינם המשתנה x (אם אין כאלה, ניקח $a = 0$). לכן, $a + dF = \{a + du : u \in F\}$ מונוכרומטית. ■

תרגיל 3: הוכח שבמשפט גלאי, אפשר לדרוש ש $d \in FS(d_1, d_2, \dots)$, כאשר $d_1, d_2, \dots \in \mathbb{N}$ נתונים (ראה תרגיל 2).

אפשר לראות את משפט גלאי כגירסה רב-מימדית של משפט ואן דר וארדן: עבור $n = 1$, המסקנה הבאה היא בדיוק משפט ואן דר וארדן.

מסקנה 6.5 (גלאי) יהי n מספר טבעי. לכל צביעה של אברי $\mathbb{N}^n$ במספר סופי של צבעים, ולכל m , יש $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ו d טבעי, כך שעבור הסדרות החשבוניות

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + md\} \\ A_2 &= \{a_2 + d, a_2 + 2d, \dots, a_2 + md\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_n + d, a_n + 2d, \dots, a_n + md\} \end{aligned}$$

הקבוצה $A_1 \times \dots \times A_n$ היא מונוכרומטית.

הוכחה: ניקח $F = \{1, \dots, m\}^n$ ונפעיל את המשפט הקודם. עבור

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

$$\blacksquare \quad A_1 \times \dots \times A_n = \mathbf{a} + d\{1, \dots, m\}^n$$

כיון שלכל $F \subseteq \mathbb{N}^n$ סופית יש m כך ש $F \subseteq \{1, \dots, m\}^n$, הגירסה הקודמת של משפט גלאי אף היא מסקנה מיידיית מהגירסה האחרונה.

תרגיל 4: הוכח את משפט גלאי עם הדרישה החזקה יותר, ש $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. (הדרכה: בהגדרת הצביעה, הוסף וקטור קבוע לסכום.)

תרגיל 5: נסח בעזרת משפט הקומפקטיות, והוכח, גירסה סופית של משפט גלאי.

6.3 משפט גרהם-ליב-רוטשילד על מרחבים אפיניים מונוכרומטים

ראינו שלכל מרחב וקטורי V ממימד אינסופי מעל $\mathbb{Z}_2$, ולכל צביעה של איבריו במספר סופי של צבעים, יש ל V תת-מרחב אפיני מונוכרומטי ממימד אינסופי (מסקנה 4.13). מעל שדה סופי גדול יותר, הטענה אינה נכונה.

תרגיל 6: יהי V מרחב וקטורי ממימד אינסופי מעל שדה $\mathbb{F}$ שבו לפחות שלשה איברים. מצא צביעה של הוקטורים בשני צבעים, כך שאין תת-מרחב אפיני מונוכרומטי ממימד אינסופי.

הדרכה: יהיו $v_1, v_2, \dots$ בלתי תלויים לינאריים. לכל $v \in V$ נציג $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ עם $\alpha_k \neq 0$. נצבע את v בירוק אם $\alpha_k = 1$ ובאדום אחרת.

גרהם (Graham), ליב (Leeb), ורוטשילד (Rothschild) הוכיחו שאם נסתפק ב"מימד סופי גדול כרצוננו", אז הכל סבבה.

משפט 6.6 (גרהם-ליב-רוטשילד) יהי V מרחב וקטורי ממימד אינסופי מעל שדה סופי $\mathbb{F}$. לכל צביעה של איברי V במספר סופי של צבעים, יש מרחבים אפיניים מונוכרומטיים מכל מימד סופי.

הוכחה: נמצא תת-מרחב אפיני ממימד 2. ההוכחה למימדים גדולים יותר דומה. יהיו $v_1, u_1, v_2, u_2, \dots \in V$ בלתי תלויים לינאריים. תהי Σ הסמיחבורה החופשית מעל $\mathbb{F}^2$. תהי

נתונה צביעה של V . נגדיר צביעה של Σ בצורה הבאה: הצבע של המילה $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}$ הוא הצבע המקורי של

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$$

ממשפט היילס-ג'ואט, יש מילה $w(x) = w_1 \cdots w_k$ מעל $\mathbb{F}^2 \cup \{x\}$ ש x מופיע בה, כך שלכל המילים $w\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)$ אותו צבע. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, הצבע של $w\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)$ הוא הצבע המקורי של

$$\underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ w_i \neq x}}^k \alpha_i v_i + \beta_i u_i}_{v_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ w_i = x}}^k \alpha v_i + \beta u_i = v_0 + \alpha \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ w_i = x}}^k v_i}_v + \beta \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ w_i = x}}^k u_i}_u = v_0 + \alpha v + \beta u$$

ולכן המרחב האפייני $v_0 + \text{span}\{v, u\}$ מונוכרומטי. כיון שהוקטורים v, u בלתי תלויים לינארית, מימד מרחב אפייני זה הוא 2. ■

6.4 משחק איקס-עיגול רב מימדי

הגדרה 6.7 ישר ב $\{1, \dots, m\}^n$ הוא קבוצה מהצורה $\{w(1), \dots, w(m)\}$ כך ש $w(x) \in \{1, \dots, m, x\}^n$ מופיע ב $w(x)$.

להמחשת ההגדרה, צייר כמה ישרים ב $\{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ וב $\{1, 2, 3, 4, 5\}^3$.

משפט 6.8 (גרהם-ליב-רוטשילד) יהיו k, m מספרים טבעיים. קיים n כך שממנו ואילך, בכל צביעה של אברי $\{1, \dots, m\}^n$ ב k צבעים יש ישר מונוכרומטי.

הוכחה: תהי Σ הסמיחבורה החופשית מעל $\{1, \dots, m\}$, ותהי

$$\mathcal{A} = \{\{w(1), \dots, w(m)\} : w(x) \in \Sigma_x \setminus \Sigma\}$$

משפט היילס-ג'ואט אומר שלכל צביעה של Σ ב k צבעים, יש קבוצה מונוכרומטית השייכת ל $\mathcal{A}$. ממשפט הקומפקטיות, יש תת-קבוצה סופית $H \subseteq \Sigma$ כך שלכל צביעה שלה ב k צבעים, יש קבוצה מונוכרומטית השייכת ל $\mathcal{A}$. כל איבר של H מכיל מילים מאורך קבוע. ניקח n כך שכל המילים האלה הן מאורך $n \geq$.

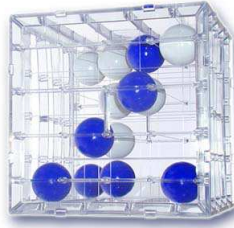
תהי $\{1, \dots, m\}^{\leq n}$ קבוצת כל המילים מעל $\{1, \dots, m\}$ שאורכן $n \geq$. נגדיר פונקציה $\varphi : \{1, \dots, m\}^{\leq n} \rightarrow \{1, \dots, m\}^n$ על ידי

$$\varphi(s_1 \dots s_r) = s_1 \dots s_r \underbrace{1 \dots 1}_{n-r}$$

תהי c צביעה של $\{1, \dots, m\}^n$ ב k צבעים. אז $c \circ \varphi$ צביעה של $\{1, \dots, m\}^{\leq n}$ ב k צבעים, ובפרט של H . תהי $\{w(1), \dots, w(m)\} \in H$ מונוכרומטית עבור צביעה זו. אז $\{\varphi(w(1)), \dots, \varphi(w(m))\}$ מונוכרומטית עבור c , וזה ישר. ■

ילדים מאבדים עניין במשחק איקס-עיגול כאשר, לאחר התנסות מעטה של שני השחקנים, המשחק מסתיים תמיד בתיקו.

יהי n מספר טבעי. במשחק איקס-עיגול על לוח n -מימדי, השחקן הראשון בוחר איבר ב"לוח" $\{1, 2, 3\}^n$ ומסמנו ב X , השחקן השני בוחר איבר פנוי בלוח ומסמנו ב O , וכן הלאה, עד למצב שיש תוים זהים שיוצרים ישר, שאז בעל התו זוכה.



מצב לוח טיפוסי ב"איקס-עיגול" תלת מימדי

ייתכן שכל התאים כבר סומנו ואין זוכה. ממשפט גרהם-ליב-רוטשילד עבור $k = 2$, אם n מספיק גדול, אז בהכרח אחד השחקנים ינצח במשחק. למעשה, הוכח ש $n = 4$ מספיק גדול לצורך זה. יתר על כן, אפשר לחשוב על גירסה של המשחק שבה יש k שחקנים שונים ולכל אחד תו משלו. גם אז, אם n מספיק גדול (n זה תלוי ב k), נקבל מהמשפט שאחד השחקנים חייב לנצח. נראה שזה השחקן הראשון.

משפט 6.9 (צורן) יהי נתון משחק עם שני שחקנים, שבו כל שחקן בתורו שם חלק על לוח סופי גלוי. אזי: או שלשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת, או שלשחקן השני יש איסטרטגיה שכופה תיקו או ניצחון.

הוכחה: משפט זה נובע מכלל דה-מורגן: נסמן צעדים חוקיים אפשריים של השחקנים באות x עם אינדקס המציין את מספר הצעד. יהי N הוא מספר המקומות הפנויים בלוח, ונניח לשם נוחיות כי N זוגי (במקרה האיזוגי יש עוד כמת אחד). נחשוב כאילו המשחק ממשיך N צעדים גם אם בשלב כלשהו ברור שאחד השחקנים ניצח. כלומר, שחקן מסוים מנצח משחק שצעדיו הם $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ אם עבור $n \leq N$ הראשון כך שיש מנצח במשחק שצעדיו הם $(x_1, \dots, x_n)$, המנצח הוא שחקן זה.

קיום איסטרטגיה מנצחת עבור השחקן הראשון פירושה:

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \dots \exists x_{N-1} \forall x_N, (x_1, \dots, x_N) \text{ is a win for ONE}$$

לכן מכלל דה-מורגן לשלילת כמתים, אי קיום איסטרטגיה מנצחת עבור השחקן הראשון פירושה:

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \dots \forall x_{N-1} \exists x_N, (x_1, \dots, x_N) \text{ is a Tie, or a win for TWO}$$

כלומר לשחקן השני יש איסטרטגיה שכופה תיקו או ניצחון. ■

כיון שעבור n מספיק גדול לא ייתכן תיקו במשחק X-O על לוח n -מימדי, יוצא שלאחד השחקנים יש איסטרטגיית ניצחון.

מסקנה 6.10 במשחק X-O על לוח (מספיק) רב-מימדי, יש איסטרטגיית ניצחון לשחקן הראשון.

הוכחה: ראינו שלאחד השחקנים, שנקרא להם אליס וגוב, יש איסטרטגיה מנצחת. נניח בשלילה שיש איסטרטגיה מנצחת לבוב. אז אליס יכולה להעתיקה בצורה הבאה. בצעד הראשון, אליס שמה X במקום שרירותי. לאחר כל צעד של בוב, אליס מוחקת את ה X השרירותי ששמה, ומפעילה את האיסטרטגיה של בוב (בהחלפת השמות של X ו O) לבחור

מקום עבור X . אם מקום זה כבר מאויש על ידי ה- X השרירותי, אלס תבחר ל- X החדש מקום שרירותי פנוי.

בכל שלב, הלוח נראה כמו לאחר הפעלת האיסטרטגיה של בוב (עם X במקום O), ובנוסף עוד X איפשהו. כיון שזו איסטרטגיה מנצחת, בשלב כלשהו יהיה ישר של X -ים (גם אם ה- X השרירותי לא עזר). לכן, יש גם לאליס איסטרטגיה מנצחת. סתירה. ■

6.5 טיול: המשחק "שווה מרחק"

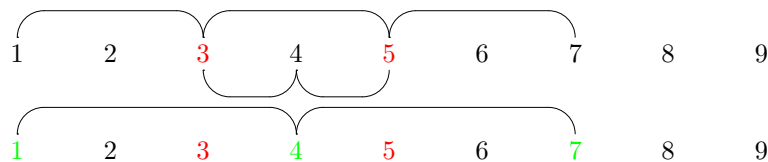
משחק זה נתגלה על ידי מחבר הספר במהלך קורס שנתן בנושא. המשחק מבוסס על משפט ואן דר וארדן. נתאר כאן את הגרסה הפשוטה ביותר שלו. גרסאות נוספות אפשר למצוא על ידי חיפוש "שווה מרחק" (Equidist) בגוגל.

ממשפט ואן דר וארדן ומשפט הקומפקטיות, אנו יודעים שיש מספר טבעי N כך שבכל צביעה של המספרים $1, 2, \dots, N$ בשני צבעים, יש שלשה חשבונית מונוכרומטית. המשפט הבא אומר מהו N האופטימלי לצורך זה.

משפט 6.11 בכל צביעה של המספרים $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ באדום וירוק, יש סידרה חשבונית מונוכרומטית מאורך 3.

הוכחה: תהי נתונה צביעה בלי סידרה חשבונית מונוכרומטית מאורך 3. בלי הגבלת הכלליות, אפשר להניח שהצבע של 5 הוא אדום.

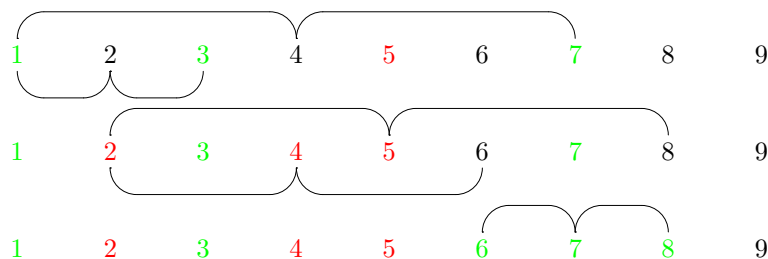
נניח ש 3 אדום או 7 אדום. מסימטריות, אפשר להניח ש 3 אדום. אזי המצב הוא:



סתירה. לכן, 3, 7 ירוקים:



לא ייתכן ש 1, 5, 9 שלשתם אדומים, לכן 1 ירוק או 9 ירוק. מסימטריה, אפשר להניח ש 1 ירוק. נקבל:



שוב סתירה. ■

תרגיל 7: מצא צביעה של המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 בשני צבעים, כך שאין יש סידרה חשבונית מונוכרומטית מאורך 3.

נתאר משחק שמבוסס על המשפט שהוכחנו. לוח המשחק נראה כך:



לרשות השחקנים כלים אדומים וירוקים. השחקנים, שנקרא להם אליס וג'וב, משחקים לפי תורות. בכל תור, אחד השחקנים בוחר כלי בצבע אדום או ירוק, ומניחו במשבצת פנויה. השחקן הראשון שמניח כלי כך שנוצרת סידרה של שלושה קלפים מאותו צבע במרחקים שווים זה מזה, מפסיד. נראה משחק לדוגמה.

אליס:



ג'וב:



אליס:



ג'וב:



אליס:



ג'וב:



אליס:



ג'וב מפסיד, כיון שבכל מקום שיניח כלי, מכל צבע, יתקבלו שלושה קלפים מאותו צבע, במרחקים שווים.

כמובן, אפשר לשחק את המשחק בלי לוח וכלים של ממש. כמו במשחק איקס-עיגול, אפשר לצייר את הלוח על דף ובמקום צבעים, להשתמש בתווים X ו O.

תרגיל 8: הוכח שבמשחק שווה-מרחק, בגירסה שבה לאליס מותר להציב רק X ולג'וב רק O, יש לבוב איסטרטגיה מנצחת.

הערה: אריאל וישנה הוכיח, בעזרת מעבר של מחשב על כל המשחקים האפשריים, שגם בלי ההגבלה שבתרגיל האחרון, לשחקן השני יש איסטרטגיה מנצחת כאשר הלוח הוא בן 9 תאים (הגירסה העיקרית של המשחק). לא ידועה לנו הוכחה שאינה מערבת בדיקת מחשב של המוני מקרים.

7 משוואות הומוגניות, משפט הקבוצה המרכזית, ותמונות

7.1 קבוצות של טבעיים בעלות מבנה קומבינטורי

"ירושלם הבנויה, כעיר שחוברה לה יחדיו" (תהלים קכ"ב, ג)

כבר ראינו שקבוצה של טבעיים שייכת לאידמפוטנט ב $(\beta\mathbb{N}, +)$ אם ורק אם היא קבוצת FS.

בהוכחת משפט ואן דר וארדן והיילס-ג'ואט, פגשנו קבוצות השייכות לעל-מסנן מינימלי ב $(\beta\mathbb{N}, +)$, כלומר לעל-מסנן השייך לאידיאל שמאלי מינימלי של $(\beta\mathbb{N}, +)$. נאפיין תכונה זו בצורה קומבינטורית.

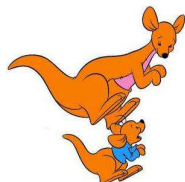
הגדרה 7.1 קבוצה אינסופית $A \subseteq \mathbb{N}$ היא סינדטית (מיוונית: לחבר יחד) אם המרווחים בין איברים סמוכים של A חסומים על ידי קבוע.

A סינדטית למקוטעין אם A חיתוך של קבוצה סינדטית עם קבוצה המכילה קטעים

$$[n, m] := \{n, n+1, n+2, \dots, m\}$$

מכל אורך.

אפשר לחשוב על קבוצה סינדטית כקבוצת "נקודות הנחיתה" של קנגורו, בדילוגו על פני הטבעיים. מרחק הקפיצה של כל קנגורו, גדול ככל שיהא, חסום.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 ...

עבור $A, B \subseteq \mathbb{N}$ ו n טבעי או 0, נסמן

$$A - n := \{a - n : a \in A\} \cap \mathbb{N}$$

$$A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\} \cap \mathbb{N}$$

אז:

1. $A \subseteq \mathbb{N}$ היא סינדטית אם ורק אם יש c טבעי כך ש $A - [0, c] = \mathbb{N}$.

2. A סינדטית למקוטעין אם ורק אם יש c טבעי כך ש $A - [0, c]$ מכילה קטעים מכל אורך.

משפט 7.2 תהי $A \subseteq \mathbb{N}$. התכונות הבאות שקולות:

1. A שייכת לעל-מסנן מינימלי ב $(\beta\mathbb{N}, +)$.

2. A סינדטית למקוטעין.

הוכחה: $(2 \Leftarrow 1)$ יהי p על-מסנן מינימלי כך ש $A \in p$. יהי $q \in \beta\mathbb{N} + p$. מלמת התיקון, יש $r \in \beta\mathbb{N}$ כך ש $p = r + q$. אז $A \in r + q$, ולכן יש n ו $C \in q$ כך ש $n + C \subseteq A$. לכן, $A - n \in q$ יוצא איפוא, ש

$$\beta\mathbb{N} + p \subseteq \bigcup_n [A - n]$$

מקומפקטיות $\beta\mathbb{N} + p$, יש c טבעי כך ש

$$\beta\mathbb{N} + p \subseteq [A] \cup [A - 1] \cup [A - 2] \cup \dots \cup [A - c] = [A - [0, c]]$$

תהי $A' := A - [0, c]$. נראה כי A' מכילה קטעים מכל אורך. $\beta\mathbb{N} + p \subseteq [A']$. יהי n מספר טבעי. $n + p \in [A']$ כלומר $n + p \in A'$. לכן, יש $B_n \in p$ כך ש $n + B_n \subseteq A'$. לכל n , $B_1 \cap \dots \cap B_n \in p$, ואם נקבע $b \in B_1 \cap \dots \cap B_n$ נקבל

$$n + b \in n + B_n \subseteq A'$$

כלומר $b + 1, \dots, b + n \in A'$, או במילים אחרות, $[b + 1, b + n] \subseteq A'$.

$(1 \Leftarrow 2)$ יהי c טבעי כך שהקבוצה $A' := A - [0, c]$ מכילה קטעים מכל אורך. לכל n ,

$$A' \cap (A' - 1) \cap \dots \cap (A' - n) \neq \emptyset$$

מתכונת החיתוך הסופי, הקבוצה $L = \bigcap_{n \geq 0} [A' - n]$ אינה ריקה. קל לראות ש L אידיאל שמאלי של $\beta\mathbb{N}$.

יהי $p \in L$ איבר מינימלי. בפרט, $A' \in p$.

$$A' = A \cup (A - 1) \cup \dots \cup (A - c) \in p$$

ולכן יש $i \leq c$ כך ש $A - i \in p$, ולכן $A \in i + p$. כיון ש p מינימלי, $i + p$ מינימלי. ■

תרגיל 1: הוכח את הטענה הבאה, שמשלימה את ההוכחה האחרונה: תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ כך שלכל n , $A \cap (A - 1) \cap \dots \cap (A - n) \neq \emptyset$. הוכח שהקבוצה $L = \bigcap_{n \geq 0} [A - n]$ היא אידיאל שמאלי של $\beta\mathbb{N}$.

ההגדרה הבאה מכלילה את הגדרותינו הקודמות לסמיחבורה כללית.

הגדרה 7.3 יהי $(S, \cdot)$ סמיחבורה, $A \subseteq S$.

1. עבור $b \in S$, $b^{-1}A := \{s \in S : bs \in A\}$.

2. עבור $B \subseteq S$, $B^{-1}A := \bigcup_{b \in B} b^{-1}A$.

3. $F^{-1}A = S$ אם יש $F \subseteq S$ סופית כך ש $F^{-1}A = S$.

4. A סינדטית למקוטעין אם יש $F \subseteq S$ סופית כך שלכל n ולכל $s_1, \dots, s_n \in S$, יש $x \in S$ כך ש

$$\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \cdot x \subseteq F^{-1}A$$

תרגיל 2: הראה שקבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ היא סינדטית למקוטעין לפי ההגדרה המקורית אם ורק אם היא סינדטית למקוטעין בסמיחבורה $(\mathbb{N}, +)$ לפי ההגדרה הכללית.

עדכון קל של הוכחת משפט 7.2 מראה את המשפט הבא.

משפט 7.4 תהי S סמיחבורה, ותהי $A \subseteq S$. התכונות הבאות שקולות:

1. A שייכת לעל-מסנן מינימלי ב βS .

2. A סינדטית למקוטעין.

תרגיל 3: הוכח את המשפט האחרון.

תרגיל 4: יהיו $(S, +)$ סמיחבורה קומוטטיבית, T תת-סמיחבורה של S . תהי φ ההרחבה הרציפה (היחידה) של פונקציית השיכון $id: T \rightarrow \beta S$, המוגדרת על ידי $id(t) = t$. הוכח:

1. $\bar{T} = [T]$ היא תת-סמיחבורה של βS .

2. $\varphi: \beta T \rightarrow [T]$ היא איזומורפיזם (חח"ע, על, רציפה, והומומורפיזם).

3. $f(p) = \{B : \exists A \in p, A \subseteq B\}$ הרחבה רציפה של פונקציית הזהות על T , ולכן $\varphi(p) = f(p)$.

4. $p \in \beta T$ מינימלי אם ורק אם $\varphi(p)$ מינימלי ב $[T]$.

5. אם T אידיאל שמאלי של S , אז לכל $p \in \beta T$ מינימלי, $\varphi(p)$ מינימלי ב βS .

תרגיל 5: תהי $(S, +)$ סמיחבורה קומוטטיבית. בעזרת התרגיל הקודם, הראה שלכל אידיאל שמאלי L של S :

1. תהי $A \subseteq L$. A שייכת לעל-מסנן מינימלי ב βL אם ורק אם A שייכת לעל-מסנן מינימלי ב βS .

2. תהי $A \subseteq S$. A שייכת לעל-מסנן מינימלי ב βS אם ורק אם $A \cap L$ שייכת לעל-מסנן מינימלי ב βL .

7.2 משפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין

הגדרה 7.5 תהי S סמיחבורה אבלית. תהי $(s_1, s_2, \dots)$ סידרה של איברים של S . עבור $F \subseteq \mathbb{N}$ סופית לא ריקה, נסמן $s_F = \sum_{n \in F} s_n$. עבור $F = \emptyset$, נגדיר $s_\emptyset = 0$. אם יש ב S איבר נייטרלי 0, ואם אין, אז רשמית $s_\emptyset$ אינו מוגדר, אך לכל $a \in S$, נחשוב על $a + s_\emptyset$ כסימון אחר ל a .

הסימון s_F מכליל בצורה טבעית את הסימון s_n עבור האיבר n של הסידרה. הנה כמה תכונות פשוטות שלו:

1. $s_n = s_{\{n\}}$.

2. $FS(s_1, s_2, \dots) = \{s_F : \emptyset \neq F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}\}$.

3. אם $F_1 < F_2$ (מספיק שהקבוצות זרות), אז $s_{F_1} + s_{F_2} = s_{F_1 \cup F_2}$.

הגדרה 7.6 תהי $(S, \cdot)$ סמיחבורה. לכל $\lambda, a_1, \dots, a_m \in S$ נגדיר

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_m \end{pmatrix}$$

בפרט, בסמיחבורה חיבורית $(S, +)$,

$$\lambda + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda + a_1 \\ \vdots \\ \lambda + a_m \end{pmatrix}$$

כמו כן, עבור $\lambda \in S$ נסמן

$$\vec{\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}$$

כך שלכל $\lambda + \mathbf{v} = \vec{\lambda} + \mathbf{v}, \mathbf{v} \in S^m$

עבור קבוצה סופית F של מספרים טבעיים, ומספר טבעי n , נכתוב $n < F$ אם כל אברי F גדולים מ n . בדומה, נגדיר $F < n, F \leq n$.

המשפט הבא הוכח על ידי פורסטנברג.

משפט 7.7 (משפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין) יהיו $(S, +)$ סמיחבורה קומוטטיבית, $A \subseteq S$ סינדטית למקוטעין, ו m מספר טבעי.

לכל $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \in S^m$, יש $F \subseteq \mathbb{N}$ סופית לא ריקה, ואיבר $\lambda \in S$ כך ש

$$\lambda + \mathbf{v}_F = \lambda + \sum_{n \in F} \mathbf{v}_n \in A^m$$

יתר על כן, אפשר לדרוש ש $\lambda \in A$.

הוכחה: ההוכחה היא שילוב של ההוכחות שראינו למשפט שכל קבוצת FS שייכת לאידמפוטנט ולמשפט ואן דר וארדן (או משפט היילס-ג'ואט).

בדומה למוסכמה לעיל, עבור $\lambda \in S$ הביטוי $\lambda + \mathbf{v}_\emptyset = \vec{\lambda}$ יציין את $\vec{\lambda}$.

לכל n , תהי

$$T_n = \{\lambda + \mathbf{v}_F : \lambda \in S, n < F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}\}$$

תהי $T = \bigcap_n \overline{T_n} \subseteq (\beta S)^m$. לכל n , $\{\vec{\lambda} : \lambda \in S\} \subseteq T_n$ ולכן $\{\vec{\lambda} : \lambda \in S\} \subseteq T$. בפרט, $T \neq \emptyset$.

T היא תת-סחבקה של $(\beta S)^m$: יהיו $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T$. יש להראות שלכל n , $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \overline{T_n}$. תהי U סביבה של $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. מרציפות החיבור ב $\mathbf{x}$, יש סביבה V של $\mathbf{x}$ כך ש $V + \mathbf{y} \subseteq U$. כיון ש $\mathbf{x} \in \overline{T_n}$, יש $\lambda + \mathbf{v}_F \in V \cap T_n$. כיון ש $(\lambda + \mathbf{v}_F) + \mathbf{y} \in U$ והמחובר השמאלי הוא מ S^m , יש סביבה W של $\mathbf{y}$ כך ש $(\lambda + \mathbf{v}_F) + W \subseteq U$. יהי $F < n_1$. ניקח $\mu + \mathbf{v}_H \in W \cap T_{n_1}$. כיון ש $F < H$ ו S קומוטטיבית,

$$\lambda + \mathbf{v}_F + \mu + \mathbf{v}_H = \lambda + \mu + \mathbf{v}_{F \cup H} \in T_n \cap U$$

בפרט, החיתוך אינו ריק.

לכל n , תהי

$$I_n = \{\lambda + \mathbf{v}_F : \lambda \in S, n < F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}, F \neq \emptyset\}$$

יהי $I = \bigcap_n \overline{I_n}$. לכל n , $\emptyset \neq I_n \subseteq \overline{I_1} \cap \dots \cap \overline{I_n}$. מתכונת החיתוך הסופי, $I \neq \emptyset$.

בהוכחה לעיל ש T סמיחבורה, נשים לב שאם F או H אינה ריקה, אז הסכום שייך ל $I_n \cap U$. לכן, I אידיאל דו־צדדי של הסחבקה T .

יהי $p \in \beta S$ מינימלי כך ש $A \in p$. כיון ש $\{\bar{\lambda} : \lambda \in S\} \subseteq T$ סגורה, הוקטור

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix}$$

שייך ל T .

מלמה 5.7, $\mathbf{p}$ מינימלי ב T ולכן שייך ל I . כיון ש $[A]^m$ סביבה של $\mathbf{p}$, היא חותכת את I_1 (למשל) ולכן יש $\lambda + \mathbf{v}_F \in A^m$.

כעת נראה שאפשר להבטיח ש $\lambda \in A$.

נקבע $\mu \in S$. ניקח את הוקטורים

$$\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} \mu \\ \mu + \mathbf{v}_1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} \mu \\ \mu + \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}, \dots \in S^{m+1}$$

ממה שכבר הוכחנו, יש $F \subseteq \mathbb{N}$ סופית לא ריקה, ואיבר $\lambda \in S$ כך ש $\lambda + \mathbf{u}_F \in A^{m+1}$. יהי $n = |F|$, ונסמן $n\mu = \mu + \dots + \mu$ הסכום של n עותקים של μ . אז

$$\lambda + \mathbf{u}_F = \lambda + \begin{pmatrix} n\mu \\ n\mu + \mathbf{v}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + n\mu \\ \lambda + n\mu + \mathbf{v}_F \end{pmatrix}$$

לכן, עבור $\lambda' := \lambda + n\mu$, מתקיים $\lambda' \in A$ וכן $\lambda' + \mathbf{v}_F \in A^m$, כדרוש. ■

תרגיל 6: הוכח בצורה מלאה את הטענה מההוכחה האחרונה, ש I אידיאל דו־צדדי של הסחבקה T .

תרגיל 7: תהי $(S, +)$ סמיחבורה אבלית אינסופית עם איבר נייטרלי 0. הוכח:

1. הקבוצה $\{0\}$ אינה סינדטית למקוטעין ב S . (רמז: אם $a + s + x = 0$ אז s הוא ההופכי של $a + x$)

2. במשפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין עבור S , אפשר לדרוש שכל רכיבי $\lambda + \mathbf{v}_F$ שונים מ 0.

משפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין גורר בקלות את משפט ואן דר וארדן: למשל, כדי למצוא סידרה חשבונית מונוכרומטית מאורך 5, ניקח, לכל n ,

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ סינדטית למקוטעין ומונוכרומטית (יש כזו, כי בכל על-מסנן מינימלי יש קבוצה מונוכרומטית) עבור הצביעה הנתונה. ממשפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין, יש λ טבעי וקבוצה סופית F כך ש

$$\lambda + \mathbf{v}_F = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 1d \\ \lambda + 2d \\ \lambda + 3d \\ \lambda + 4d \\ \lambda + 5d \end{pmatrix} \in A^5$$

כאשר $d = |F|$. קיבלנו איפוא סידרה חשבונית מונוכרומטית מאורך 5.

החיזוק הבא של משפט ואן דר וארדן ישמש אותנו, בהמשך, לפתרון משוואות בצבעים.

משפט 7.8 יהיו $m, d_1, d_2, \dots$ מספרים טבעיים. לכל קבוצה סינדטית למקוטעין A , יש $a, a + d, \dots, a + (m-1)d \in A$ ומספר טבעי a כך ש $d \in \text{FS}(d_1, d_2, \dots)$.

הוכחה: דומה להוכחת משפט ואן דר וארדן ממשפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין: ניקח, לכל n ,

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 1d_n \\ 2d_n \\ \vdots \\ md_n \end{pmatrix}$$

אז

$$\lambda + \mathbf{v}_F = \lambda + \sum_{n \in F} \begin{pmatrix} 1d_n \\ 2d_n \\ \vdots \\ md_n \end{pmatrix} = \lambda + \begin{pmatrix} 1 \sum_{n \in F} d_n \\ 2 \sum_{n \in F} d_n \\ \vdots \\ m \sum_{n \in F} d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 1d \\ \lambda + 2d \\ \vdots \\ \lambda + md \end{pmatrix}$$

■

כאשר $d = \sum_{n \in F} d_n$. ניקח $a = \lambda + d$.

7.3 משפט ראדו: פתרון מונוכרומטי למשוואה הומוגנית

משפט הצביעה של שור אמר, שלמשוואה $x + y - z = 0$ יש פתרון מונוכרומטי, לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים. בפרק זה נדון בשאלה, לאיזה עוד משוואות לינאריות הומוגניות יש את התכונה הזו.

למה 7.9 בכל סחבקה יש איבר שהוא גם אידמפוטנט וגם מינימלי.

הוכחה: יהי L אידיאל שמאלי מינימלי בסחבקה. אז L סחבקה, ולכן יש ב L אידמפוטנט. ■

הגדרה 7.10 איבר בסמיחבורה שהוא גם אידמפוטנט וגם מינימלי ייקרא אידמפוטנט מינימלי.

קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ היא מרכזית אם A שייכת לאידמפוטנט מינימלי p ב $(\beta\mathbb{N}, +)$.

יוצא, שכל קבוצה מרכזית היא גם קבוצת FS וגם סינדטית למקוטעין. הכיוון ההפוך אינו נכון.

למה 7.11 יהי p אידמפוטנט ב $(\beta\mathbb{N}, +)$. לכל c טבעי, $c\mathbb{N} \in p$.

הוכחה: למעשה, הוכחת עובדה זו ניתנה כתרגיל באחד הפרקים הקודמים. ניתן כאן הוכחה אחרת. כיון ש

$$c\mathbb{N} \cup (c\mathbb{N} + 1) \cup \dots \cup (c\mathbb{N} + c - 1) = \mathbb{N} \in p$$

יש $0 \leq i < c$ כך ש $c\mathbb{N} + i \in p$. p אידמפוטנט, לכן $c\mathbb{N} + i$ קבוצת FS. בפרט, יש $cm + i, cn + i \in c\mathbb{N} + i$ שגם סכומם $c(m + n) + 2i \in c\mathbb{N} + i$, ולכן $i \in c\mathbb{N}$, ובהכרח $i = 0$. ■

תרגיל 8: הוכח שלכל $p \in \beta\mathbb{N}$, $p \bmod c$ שווה ל k היחיד כך ש $c\mathbb{N} + k \in p$.
נשתמש בשידורג הבא של משפט ואן דר וארדן.

משפט 7.12 לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, ולכל m, c טבעיים, יש a, d טבעיים כך ש $a, a + d, \dots, a + md$ וגם cd הם מאותו צבע.

הוכחה: יהי p אידמפוטנט מינימלי. ניקח $A \in p$ מונוכרומטית. כיון ש p אידמפוטנט, $c\mathbb{N} \in p$ ולכן $A \cap c\mathbb{N} \in p$ (שוב, כיון ש p אידמפוטנט), קבוצת FS, כלומר יש $cd_1, cd_2, \dots \in A \cap c\mathbb{N}$ שונים, כך ש

$$c \cdot \text{FS}(d_1, d_2, \dots) = \text{FS}(cd_1, cd_2, \dots) \subseteq A \cap c\mathbb{N}$$

ממשפט 7.8, כיון ש A סינדטית למקוטעין, יש $d \in \text{FS}(d_1, d_2, \dots)$ כך ש $a, a + d, \dots, a + md$ ■
 $cd \in A$ מהמשוואה לעיל, $cd \in A$.

ראדו (Rado), תלמידו של שור, הכליל את משפט הצביעה של שור למשפט הבא.

משפט 7.13 (ראדו) תהי נתונה משוואה לינארית עם מקדמים שלמים שאינם אפס,

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0$$

התכונות הבאות שקולות:

1. יש בין מקדמי המשוואה $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ כאלה שסכומם אפס.

2. לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש למשוואה הנתונה פתרון מונוכרומטי.

הוכחה: ($1 \Leftrightarrow 2$) נקבע מספר ראשוני גדול מאד p (מספיק ש $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| < p$). נגדיר צביעה $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, p-1\}$ על ידי $\chi(n) = i$ אם $n = p^k(pt + i)$, $k, n = p^k(pt + i)$ מקסימלי כך ש p^k מחלק את n . מההנחה, יש פתרון מונוכרומטי $x_1 = p^{k_1}(pt_1 + i), \dots, x_m = p^{k_m}(pt_m + i)$ על ידי סידור מקדמי המשוואה בהתאם, אפשר להניח ש

$$k_1 = \dots = k_j < k_{j+1} \leq \dots \leq k_m$$

(ייתכן ש j הוא 1 או m). כיון שזה פתרון של המשוואה,

$$\alpha_1 p^{k_1}(pt_1 + i) + \alpha_2 p^{k_1}(pt_1 + i) + \dots + \alpha_m p^{k_m}(pt_m + i) = 0$$

נחלק ב p^{k_1} ולאחר מכן נבצע מודולו p , ונקבל

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_j)i = \alpha_1 i + \dots + \alpha_j i = 0 \pmod{p}$$

לכן

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_j = 0 \pmod{p}$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_j = 0, |\alpha_1 + \dots + \alpha_j| < p$$

כיון ש $2 \leq j$ אם $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0$, אז $(1, \dots, 1)$ פתרון מונוכרומטי. לכן, נניח שסכום כל המקדמים אינו אפס. על ידי סידור מחדש של המשוואה, אפשר להניח ש $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$ לאיזהו $1 < k < m$ מירבי.

נתחיל מהמקרה הפשוט ביותר מסוג זה: משוואה מהצורה $\alpha x - \alpha y + \beta z = 0$ כך ש α, β שלמים שונים מאפס. על ידי כפל המשוואה המקורית ב -1 , אם צריך, אפשר להניח ש β חיובי. על ידי החלפת תפקידים של x ו y , אם צריך, אפשר להניח שגם α חיובי. דרוש

$$y - x = \frac{\beta}{\alpha} z$$

כדי שהפתרון יהיה טבעי, ניקח למשל $z = \alpha d$ עבור d טבעי שרירותי. אז $y = x + \beta d$ כלומר

$$(x, x + \beta d, \alpha d)$$

פתרון לכל d טבעי. מהמשפט האחרון (7.12), יש כזו שלשה מונוכרומטית.

כעת נטפל במקרה הכללי: אם נסמן $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}$, $\beta = \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_m$ אז α, β שלמים שונים מאפס, ו $\alpha_k = -\alpha$. ממה שכבר הוכחנו, יש פתרון מונוכרומטי (x, y, z) למשוואה $\alpha x - \alpha y + \beta z = 0$. אז $(x, \dots, x, y, z, \dots, z)$ פתרון מונוכרומטי של המשוואה המקורית:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k y + \alpha_{k+1} z + \dots + \alpha_m z &= \\ = \underbrace{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1})}_{\alpha} x + \underbrace{\alpha_k}_{-\alpha} y + \underbrace{(\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_m)}_{\beta} z &= 0 \end{aligned}$$

■

תרגיל 9: תהי נתונה צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים. הוכח שיש צבע כך שכל משוואה לינארית מעל השלמים שסכום חלק ממקדמיה אפס, יש פתרון מונוכרומטי מצבע זה. (הדרכה: נסח את המשפטים שלנו בשפה של קבוצה מרכזית).

תרגיל 10: הוכח את החיזוק הבא של משפט ראדו: תהי נתונה משוואה

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0$$

שמקדמיה שלמים, וסכום חלקם הוא אפס. תהי A קבוצת FS סינדטית למקוטעין (כן! גם וגם). הוכח שיש פתרון למשוואה, שכל איבריו שייכים ל A . (הדרכה: עיין בהוכחת המשפטים לעיל).

7.4 משפט הקבוצה המרכזית של פורסטנברג

נזכור שקבוצה נקראת פרכזית אם היא שייכת לאידמפוטנט מינימלי. המשפט הבא הוכח על ידי פורסטנברג. בהוכחתו, ניעזר בלמה הבאה.

למה 7.14 יהי p אידמפוטנט ב $(\beta S, +)$, ותהי $A \in p$. יש $A \supseteq B \in p$ כך שלכל $v \in B^m$, $v + C^m \subseteq A^m$ עם $A \supseteq C \in p$.

הוכחה: מאיפיון אידמפוטנט, יש $A \supseteq B \in p$ כך שלכל $b \in B$, יש $A \supseteq C_b \in p$ עם $b + C_b \subseteq A$ בהנתן

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in C^m$$

ניקח $C = C_{b_1} \cap C_{b_2} \cap \dots \cap C_{b_m} \in p$ אז $v + C^m \subseteq A^m$. ■

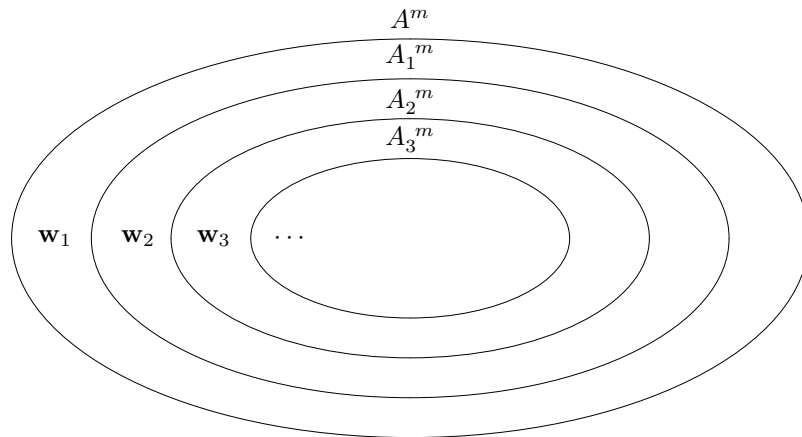
משפט 7.15 (משפט הקבוצה המרכזית) יהיו $(S, +)$ סמיחבורה קומוטטיבית, $A \subseteq S$ מרכזית, ו m מספר טבעי.

לכל $v_1, v_2, \dots \in S^m$, יש קבוצות לא ריקות של מספרים טבעיים $F_1 < F_2 < \dots$ ואיברים $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in A$ כך ש

$$FS(\lambda_1 + v_{F_1}, \lambda_2 + v_{F_2}, \dots) \in A^m$$

אפשר לדרוש גם ש $FS(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \subseteq A$

הוכחה: יהי p אידמפוטנט מינימלי כך ש $A \in p$. בעזרת הלמה, נוכל להפעיל מהלך זהה לזה שבהוכחת משפט הינדמן.



תהי $B \in p$ כבלמה, עבור A . יהי $w_1 \in B^m$. מהלמה, יש $A_1 \subseteq A$ ב p כך ש $w_1 + A_1^m \subseteq A^m$.

תהי $B \in p$ כבלמה, עבור A_1 . יהי $w_2 \in B^m$. מהלמה, יש $A_2 \subseteq A_1$ ב p כך ש $w_2 + A_2^m \subseteq A_1^m$.

תהי $B \in p$ כבלמה, עבור A_2 . יהי $w_3 \in B^m$. מהלמה, יש $A_3 \subseteq A_2$ ב p כך ש $w_3 + A_3^m \subseteq A_2^m$.

נמשיך באותו אופן.

כמו בהוכחת משפט הינדמן, נקבל ש $FS(w_1, w_2, \dots) \subseteq A^m$.

בכל צעד n, w_n יכול להבחר כרצוננו מקבוצה שהיא חזקה של קבוצה מרכזית.

לכן, ממשפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין, אפשר לדרוש ש w_1 הוא מהצורה $\lambda_1 + v_{F_1}$ כך ש $\lambda_1 \in A$ ובפרט $\lambda_1 \in B$.

ממשפט הקבוצה הסינדטית למקוטעין עם הוקטורים $\{v_n : n > F_1\}$, אפשר לדרוש ש w_2 הוא מהצורה $\lambda_2 + v_{F_2}$ כך ש $\lambda_2 \in B$ ו $F_1 < F_2$.

וכן הלאה.

בשביל הגאדג'ט שבסוף המשפט, נשים לב שבכל שלב n , כיון ש $\vec{\lambda}_n \in B^n$, יש $\tilde{A}_n \in p$ כך ש $\lambda_n + \tilde{A}_n^m \subseteq A_{n-1}^m$, ואפשר להניח (על ידי מעבר ל $A_n \cap \tilde{A}_n$) ש $A_n \subseteq \tilde{A}_n$. יוצא, שכל סכום מהצורה

$$(\lambda_{i_1} + u_{i_1}) + \dots + (\lambda_{i_k} + u_{i_k})$$

כאשר $i_1 < \dots < i_k$ וכל u_i הוא v_{F_i} או 0, שייך ל A^m . ■

מסקנה 7.16 יהיו $(S, +)$ סמיחבורה קומוטטיבית ו m מספר טבעי. לכל צביעה של אברי S במספר סופי של צבעים, ולכל $v_1, v_2, \dots \in S^m$, יש קבוצות לא ריקות של מספרים טבעיים $F_1 < F_2 < \dots$, ואיברים $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in S$ כך שכל רכיבי כל הוקטורים בקבוצה $FS(\lambda_1 + v_{F_1}, \lambda_2 + v_{F_2}, \dots)$ הם מאותו צבע.

הוכחה: יהי p אידמפוטנט מינימלי. ניקח $A \in p$ מונוכרומטית, ונפעיל את משפט הקבוצה המרכזית על A . ■

הסכומים הסופיים במשפט הקבוצה המרכזית נראים כך: לכל $i_1 < i_2 < \dots < i_k$,

$$(\lambda_{i_1} + v_{F_{i_1}}) + \dots + (\lambda_{i_k} + v_{F_{i_k}}) = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} + v_{F_{i_1}} + \dots + v_{F_{i_k}} = \lambda + v_F$$

כאשר $F = F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_k}$ ו $\lambda = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}$.

לכל $H \subseteq \mathbb{N}$ סופית, נסמן $F_H := \bigcup_{n \in H} F_n$. אז

$$\sum_{n \in H} \lambda_n + v_{F_n} = \lambda_H + v_{F_H}$$

7.5 תמונות מונוכרומטיות

הגדרה 7.17 תהי A מטריצה שרכיביה טבעיים או 0. רכיב a_{ij} של A הוא איבר מוביל אם הוא הראשון בשורה שלו שאינו אפס. מטריצה A מקיימת את תנאי האיבר המוביל אם אין בה שורות אפסים (כלומר, בכל שורה יש איבר מוביל), ובכל עמודה של A , כל האיברים המובילים המופיעים בה (אם יש כאלה) שווים.

משפט 7.18 (תמונה מונוכרומטית) תהי A מטריצה $m \times n$ שרכיביה מספרים טבעיים או אפס, ומקיימים את תנאי האיבר המוביל.

לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש $v \in \mathbb{N}^n$ כך שכל רכיבי Av הם מאותו צבע.

לפני שנוכיח את המשפט, נראה שהוא גורר בקלות כמה משפטי צביעה מרכזיים.

לקבלת משפט הצביעה של שור, ניקח את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$$

ממשפט התמונה המונוכרומטית, לכל צביעה יש מספרים טבעיים x, y כך ש $x, y, x+y$ שלשתם מאותו צבע.

למשפט ואן דר וארדן, בתוספת הדרישה שגם cd מאותו צבע, ניקח לכל m את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & m \\ 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+2y \\ \vdots \\ x+my \\ cy \end{pmatrix}$$

משפט פולקמן-ראדורסאנדרס הוא הגירסה הסופית של משפט הינדמן. למשל כדי לקבל שלשה מספרים טבעיים שכל הסכומים של חלק מהם או כולם הם מאותו צבע, ניקח

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ x+z \\ x \\ y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

תרגיל 10: הסק ממשפט התמונה המונוכרומטית, שלכל m, c_1, c_2 טבעיים, לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש a, d כך ש:

1. c_1 מחלק את a .

2. ל $a, a+d, \dots, a+md, c_2d$ יש אותו צבע.

כל מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \vec{\alpha}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ מספרים טבעיים כלשהם, ומספר האיברים בכל וקטור

$$\vec{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_i \end{pmatrix}$$

אינו מוגבל, ובמקום הכוכביות אפשר לשים כל רשימה של מספרים טבעיים או 0, מקיימת את תנאי האיבר המוביל.

מספיק להוכיח את משפט התמונה המונוכרומטית עבור מטריצות מהצורה (1), מהסיבות הבאות:

1. עמודות אפסים פירושן שרכיב מסויים בוקטור v אינו משפיע על התוצאה Av , ולכן אפשר לוותר על עמודת האפס ועל רכיב זה, בלי לשנות את המסקנה. לכן, אפשר להניח שאין ב A עמודות אפסים.

2. שינוי סדר השורות של A אינו משנה את המסקנה, שכן אפשר לשנות את סדר אברי הוקטור v בהתאם כך שרכיבי Av יצאו אותו דבר (רק בסדר שונה).

3. על ידי הוספת שורות למטריצה תוך שמירת תנאי האיבר המוביל, טענת המשפט תהפוך חזקה יותר: בלי הגבלת הכלליות, אם נוסיף את השורות החדשות בסוף, אז וקטור התמונה הישן הוא רישא של וקטור התמונה לאחר הוספת שורות (כיון שכפל מטריצות הוא שורה-שורה).

בהוכחה הבאה, כדי לראות בצורה יותר ברורה את הקשר למשפט הקבוצה המרכזית, מומלץ לקרוא אותה ראשית בהנחה ש $\alpha_i = 1$ לכל i .

הוכחה: (הוכחת משפט התמונה המונוכרומטית) נניח, בלי הגבלת הכללית, ש A היא מהצורה (1).

ניקח אידמפוטנט מינימלי p ב $\beta\mathbb{N}$, וקבוצה מונוכרומטית $C \in p$. קבוצה מרכזית. אנו מראים, למעשה, שלכל קבוצה מרכזית C יש $v \in \mathbb{N}^n$ כך שכל רכיבי Av שייכים ל C .

ההוכחה היא באינדוקציה על n בהצגת המטריצה (1). כדי שאפשר יהיה להמשיך את האינדוקציה מ n ל $n+1$, נחזק מעט את הטענה שאנו מוכיחים, ונראה שלכל n , יש וקטורים $v_1, v_2, \dots \in \mathbb{N}^n$ כך שלכל $F \subseteq \mathbb{N}$ סופית, כל רכיבי Av_F שייכים ל C .

$n = 1$: במקרה זה, המטריצה היא וקטור עמודה שכל רכיביו זהים, וכיון ששורות זהות לשורות קודמות לא תורמות רכיב חדש לווקטור התמונה, אפשר להניח שכל שורה מופיעה רק פעם אחת. במקרה שלנו, זה אומר שהמטריצה היא סקלר $\alpha = \alpha_1$, ויש למצוא סקלרים $v_1, v_2, \dots \in \mathbb{N}$ כך שלכל $F \subseteq \mathbb{N}$ סופית, $\alpha v_F \in C$. כיון ש $C \cap \alpha\mathbb{N}$ קבוצת FS, ממשפט הינדמן יש $\alpha v_1, \alpha v_2, \dots \in C \cap \alpha\mathbb{N}$ כך ש

$$\alpha \text{FS}(v_1, v_2, \dots) = \text{FS}(\alpha v_1, \alpha v_2, \dots) \subseteq C \cap \alpha\mathbb{N} \subseteq C$$

$n + 1$: נציג את המטריצה (1) בכתוב בלוקים

$$\cdot \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & B \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix}$$

אפשר, על ידי שכפול שורות אם צריך, להניח שמספר השורות ב A, B זהה. נסמנו m .

A היא מהצורה (1) עם n עמודות, ולכן מהנחת האינדוקציה, יש וקטורים $v_1, v_2, \dots \in \mathbb{N}^n$ כך שלכל $F \subseteq \mathbb{N}$ סופית, כל רכיבי Av_F שייכים ל C . נשים לב שלכל λ ולכל $F \subseteq \mathbb{N}$ סופית מתקיים

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha} & B \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ v_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha + Bv_F \\ Av_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + Bv_F \\ Av_F \end{pmatrix}$$

נתבונן בוקטורים $\mathbf{u}_1 := \mathbf{B}\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{B}\mathbf{v}_2, \dots$ לכל $F \subseteq \mathbb{N}$ סופית,

$$\mathbf{u}_F = \sum_{n \in F} \mathbf{u}_n = \sum_{n \in F} \mathbf{B}\mathbf{v}_n = \mathbf{B} \sum_{n \in F} \mathbf{v}_n = \mathbf{B}\mathbf{v}_F$$

ממשפט הקבוצה המרכזית, יש $F_1 < F_2 < \dots$ סופיות ו $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \dots \in C \cap \alpha\mathbb{N}$ כך ש
 $\{\alpha\lambda_H + \mathbf{u}_{F_H} : H \in [\mathbb{N}]^{<\infty}\} = \text{FS}(\alpha\lambda_1 + \mathbf{u}_{F_1}, \alpha\lambda_2 + \mathbf{u}_{F_2}, \dots) \subseteq (C \cap \alpha\mathbb{N})^m \subseteq C^m$

נסמן $\mathbf{w}_H = \begin{pmatrix} \lambda_H \\ \mathbf{v}_{F_H} \end{pmatrix}$, לכל $H \subseteq \mathbb{N}$ סופית, $\mathbf{w}_1 := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mathbf{v}_{F_1} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 := \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mathbf{v}_{F_2} \end{pmatrix}, \dots$ לכן,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \mathbf{B} \\ \vec{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{w}_H &= \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \mathbf{B} \\ \vec{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_H \\ \mathbf{v}_{F_H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_H + \mathbf{B}\mathbf{v}_{F_H} \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_{F_H} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\lambda_H + \mathbf{u}_{F_H} \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_{F_H} \end{pmatrix} \in C^{2m} \end{aligned}$$

לכן, הוקטורים $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots \in \mathbb{N}^{n+1}$ הם כדרוש בטענת האינדוקציה. ■

אם ננסה להכליל את משפט התמונה המונכרומטית כך שלרכיבי המטריצה $\mathbf{A}$ מותר להיות מספרים שלמים כלשהם, ניתקל במכשול מיידי: אם למשל כל רכיבי $\mathbf{A}$ שליליים ו $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$, אז כל רכיבי $\mathbf{A}\mathbf{v}$ שליליים. כיון שאנו מתחילים עם צביעה של המספרים הטבעיים בלבד, אנו דורשים שכל אברי $\mathbf{A}\mathbf{v}$ הם מספרים טבעיים. מתברר שאין מכשול פרט לזה שתיארנו.

למה 7.19 (תמונה מונכרומטית מעל הרציונלים) תהי $\mathbf{A}$ מטריצה $m \times n$ שרכיביה מספרים רציונלים, מקיימים את תנאי האיבר המוביל, וכך שכל האיברים המובילים הם חיוביים.

לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$ כך שכל רכיבי $\mathbf{A}\mathbf{v}$ הם מאותו צבע.

הוכחה: נכפול את $\mathbf{A}$ במספר טבעי α כך שכל אברי המטריצה

$$\tilde{\mathbf{A}} := \alpha\mathbf{A}$$

הם שלמים, ובנוסף כל האיברים המובילים גדולים מ 1. יהי N גדול מהערכים המוחלטים של כל רכיבי $\tilde{\mathbf{A}}$. תהי

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & N & N^2 & \dots & N^{n-1} \\ & 1 & N & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & N^2 \\ O & & & 1 & N \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ונתבונן במטריצה $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{B}$. כל אברי מטריצה זו שייכים ל $\mathbb{N} \cup \{0\}$: לכל i, j , יהי α_i האיבר המוביל בשורה i של $\tilde{\mathbf{A}}$. עבור d מתאים,

$$(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{B})_{ij} = \alpha_i N^d + * \cdot N^{d-1} + \dots + * \cdot 1$$

(או 0). כיון ש $1 < \alpha_i$ וערכו המוחלט של כל איבר של $\tilde{\mathbf{A}}$ קטן מ N ,

$$|* \cdot N^{d-1} + \dots + * \cdot 1| \leq (N-1)(N^{d-1} + N^{d-2} + \dots + 1) = N^d - 1 < \alpha_i N^d$$

ולכן $(\tilde{A}B)_{ij}$ חיובי. כיון שהוא שלם, הוא מספר טבעי.

כמו כן, המטריצה $\tilde{A}B$ מקיימת את תנאי האיבר המוביל: המכפלה של כל שורה של $\tilde{A}$ ב B היא מהצורה

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_k, \alpha_i, *, \dots, *) \begin{pmatrix} 1 & N & N^2 & \dots & N^{n-1} \\ & 1 & N & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & N^2 \\ O & & & 1 & N \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, \alpha_i, *, \dots, *)$$

ולכן האיברים המובילים של $\tilde{A}B$ שווים לאיברים המובילים של $\tilde{A}$, שמקיימת את תנאי האיבר המוביל.

ממשפט התמונה המונוכרומטית, לכל צביעה של הטבעיים יש וקטור v של מספרים טבעיים כך שלכל רכיבי

$$\tilde{A}Bv = \alpha ABv = A(\alpha Bv)$$

יש אותו צבע. כל רכיב של Bv הוא סכום של מכפלות של מספרים טבעיים, ולכן מספר טבעי. כיון ש α מספר טבעי, כל רכיבי $u := \alpha Bv$ הם מספרים טבעיים. כאמור, כל רכיבי Av הם מאותו צבע. ■

משפט 7.20 (תמונה מונוכרומטית מרובה) תהי A מטריצה $m \times n$ שרכיביה מספרים רציונליים, מקיימים את תנאי האיבר המוביל, וכל האיברים המובילים שלה חיוביים.

נניח בנוסף, ששורות A שונות זו מזו.

לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש $v \in \mathbb{N}^n$ כך שכל רכיבי Av שונים זה מזה, ומאותו צבע.

הוכחה: כרגיל, אפשר להניח שבכל עמודה i של A יש איבר מוביל α_i . לכל שתי שורות שונות r_i, r_j של A , $r_i - r_j \neq 0$. נניח שהאיבר המוביל של וקטור זה נמצא במקום k . נכפול וקטור זה במספר רציונלי q_{ij} כך שהאיבר המוביל שלו יהיה α_k , ונוסיפו כשורה חדשה למטריצה A . נקבל מטריצה חדשה $\tilde{A}$ של מספרים רציונליים, שכל אבריה המובילים חיוביים, והיא מקיימת את תנאי האיבר המוביל.

ממשפט התמונה המונוכרומטית מעל הרציונלים, יש $v \in \mathbb{N}^n$ כך שכל רכיבי $\tilde{A}v$ הם טבעיים ומאותו צבע. בפרט, כל רכיבי Av הם מאותו צבע, ולכל שתי שורות שונות r_i, r_j של A , $q_{ij}(r_i - r_j)v \in \mathbb{N}$ ובפרט אינו 0. לכן, $r_i v \neq r_j v$ לכל i, j , כלומר אברי Av שונים זה מזה. ■

תרגיל 11: הוכח את משפט דאובר (Deuber): לכל n ולכל c, k טבעיים, ולכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש $x_1, \dots, x_n$ טבעיים כך שכל אברי כל הקבוצות הבאות הם מאותו הצבע (כאשר $[0, k-1] := \{0, \dots, k-1\}$):

$$\begin{aligned} cx_1 + [0, k-1]x_2 + x_3 + [0, k-1]x_4 + \dots + [0, k-1]x_n \\ cx_2 + [0, k-1]x_3 + [0, k-1]x_4 + \dots + [0, k-1]x_n \\ cx_3 + [0, k-1]x_4 + \dots + [0, k-1]x_n \\ \vdots \\ cx_n \end{aligned}$$

(הבהרה: בקבוצה הראשונה, למשל, יש עד k^{n-1} איברים).

תרגיל 12: הוכח, בעזרת עדכון משפט התמונה המונוכרומטית, את משפט ברגלסון-דאונר-הינדמן: יהי V מרחב וקטורי אינסופי מעל שדה $\mathbb{F}$.

תהי A מטריצה $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$, המקיימת את תנאי האיבר המוביל.

לכל צביעה של אברי $V \setminus \{\vec{0}\}$ במספר סופי של צבעים, יש וקטורים $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{\vec{0}\}$ כך שכל הוקטורים

$$a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n$$

, $i = 1, \dots, m$ הם מאותו צבע.

7.6 משפט ראדו עבור מערכות של משוואות

הגדרה 7.21 מטריצה $A = (v_1, \dots, v_n)$ מעל $\mathbb{Q}$ מקיימת את תנאי העמודה אם יש חלוקה $\{1, \dots, n\} = F_1 \cup \dots \cup F_k$ לקבוצות לא ריקות (ייתכן ש $k = 1$) כך שמתקיים

$$1. \quad v_{F_1} = \mathbf{0}$$

2. לכל $i = 2, \dots, k$, v_{F_i} הוא צירוף לינארי של הוקטורים v_j , $j \in F_1 \cup \dots \cup F_{i-1}$.
מעל $\mathbb{Q}$.

המשפט הבא מכליל את משפט ראדו עבור משוואה אחת (7.13).

משפט 7.22 (ראדו) תהי A מטריצה מעל $\mathbb{Q}$, המקיימת את תנאי העמודה.

לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש למערכת המשוואות ההומוגנית

$$Ax = \mathbf{0}$$

פיתרון מונוכרומטי.

הוכחה: אפשר לשנות את סדר העמודות של $A = (v_1, \dots, v_n)$ מבלי לשנות את הטענה, כיון שאפשר לשנות את סדר הרכיבים של וקטור פתרון מונוכרומטי בצורה מתאימה ולקבל פתרון (מונוכרומטי) למערכת המקורית. לכן, נניח בלי הגבלת הכלליות ש

$$F_1 = \{1, \dots, n_1\}, F_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_2\}, \dots, F_k = \{n_{k-1} + 1, \dots, n\}$$

בצורה זו, תנאי העמודה אומר שיש מקדמים רציונלים שאפשר להציב במקום הכוכביות להלן, כך שהמשוואות הבאות יתקיימו:

$$\begin{aligned} v_1 + \dots + v_{n_1} &= \mathbf{0} \\ v_{n_1+1} + \dots + v_{n_2} &= * \cdot v_1 + \dots + * \cdot v_{n_1} \\ &\vdots \\ v_{n_{k-1}+1} + \dots + v_n &= * \cdot v_1 + \dots + * \cdot v_{n_{k-1}} \end{aligned}$$

אם נעביר הכל לאגפים השמאליים, נראה שפירושו של דבר שיש מקדמים רציונלים שאפשר להציב במקום הכוכביות להלן, כך שהמשוואה הבאה תתקיים:

$$\underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_A \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & \dots \\ 0 & & * \\ \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O$$

B

האיברים המובילים של המטריצה הימנית B כולם שווים ל 1.

ממשפט התמונה המונוכרומטית, לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים יש וקטור v של מספרים טבעיים כך שלכל רכיבי $u := Bv$ יש אותו צבע.

$$Au = ABv = Ov = 0$$

■

לכן, u פתרון מונוכרומטי של המערכת $Ax = 0$.

למעשה, הראינו שאם A מקיימת את תנאי העמודה, אז יש פתרון למערכת $Ax = 0$ בכל קבוצה מרכזית. מכאן, שלכל צביעה של הטבעיים יש צבע כך שלכל מערכות המשוואות ההומוגניות המקיימות את תנאי העמודה, יש פתרון מצבע זה.

הערה: התנאי במשפט ראדו אינו רק הכרחי, אלא גם מספיק. ההוכחה לכך דומה במהותה לזו שהראינו עבור המקרה של משוואה אחת, ולכן לא נביאה כאן ונסתפק בהפניית הקורא לספר של גראהם ספנסר-רוטשילד, או לספר של הינדמן-שטראוס, בפרק על משפט ראדו.

נסיים בציטוט משפט בלי הוכחה, שנותן תנאי הכרחי ומספיק, כללי יותר מתנאי האיבר המוביל וניתן עקרונית לבדיקה, לכך שלמטריצה של רציונלים יש תמונה מונוכרומטית.

משפט 7.23 (הינדמן-לידר) תהי $A = (v_1, \dots, v_n)$ מטריצה $m \times n$ מעל $\mathbb{Q}$. התכונות הבאות שקולות:

1. ל A יש תמונות מונוכרומטיות בכל צביעה, כלומר: לכל צביעה של המספרים הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש וקטור v של מספרים טבעיים כך שכל רכיבי Av הם מאותו צבע.

2. קיימים מספרים רציונלים חיוביים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך שהמטריצה

$$(\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n, -e_1, \dots, -e_m)$$

מקיימת את תנאי העמודה.

תרגיל 13: בדוק לאיזה מהמטריצות הבאות יש תמונה מונוכרומטית בכל צביעה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -9 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

8 קבוצות גדולות וצביעות של חבורות

8.1 קבוצת ההפרשים של קבוצה

סעיף זה מכליל תוצאות של פרוטסוב, שהוכחו למקרה ש S חבורה, למקרה ש S סמיחבורה. נזכר בהגדרות הבאות. יהיו $(S, \cdot)$ סמיחבורה, $A \subseteq S$.

$$1. \text{ עבור } b \in S, b^{-1}A := \{s \in S : bs \in A\}$$

$$2. \text{ עבור } B \subseteq S, B^{-1}A := \bigcup_{b \in B} b^{-1}A$$

$$3. A \text{ סינדטית אם יש } F \subseteq S \text{ סופית כך ש } F^{-1}A = S$$

$$4. A \text{ סינדטית למקוטעין אם יש } F \subseteq S \text{ סופית כך שלכל } n \text{ ולכל } s_1, \dots, s_n \in S, \text{ יש } x \in S \text{ כך ש}$$

$$\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \cdot x \subseteq F^{-1}A$$

למה 8.1 בהגדרת קבוצה סינדטית למקוטעין, אפשר לדרוש ש $x \in A$.

הוכחה: הוכחה א (תקציר): בהוכחה המאפיינת קבוצה סינדטית למקוטעין כקבוצה השייכת לעל-מסנן מינימלי (משפט 7.2), נבחר מחיתוך של קבוצות בעל-מסנן שאליו A שייכת, ולכן אפשר לחתכן גם עם A לפני שבחרים את x .

הוכחה ב: נקבע $t \in F$ תהי

$$H = \{t\} \cup s_1 Ft \cup s_2 Ft \cup \dots \cup s_k Ft$$

יהי $x \in S$ כך ש $Hx \subseteq F^{-1}A$. בפרט, $tx \in F^{-1}A$, ולכן יש $f \in F$ כך ש $a := ftx \in A$.
 $s_i a = s_i ftx \in F^{-1}A, i \text{ לכל, } ft \in Ft$ ■

הגדרה 8.2 יהיו $s \in S, A \subseteq S$

$$1. \text{ עבור } b \in S, \text{ נסמן:}$$

$$2. Ab^{-1} := \{x \in S : xb \in A\}$$

$$3. sb^{-1} := \{s\} b^{-1} = \{x \in S : xb = s\}$$

$$4. \text{ עבור } B \subseteq S, \text{ נסמן } AB^{-1} = \bigcup_{b \in B} Ab^{-1} = \{x \in S : \exists b \in B, xb \in A\}$$

כאשר S סמיחבורה חיבורית, טבעי לכתוב $A - A$ במקום AA^{-1} . מכאן השם קבוצת ההפרשים.

$$\text{למה 8.3} \text{ לכל } A, B, C \subseteq S, (A^{-1}B)C^{-1} = A^{-1}(BC^{-1})$$

הוכחה: מההגדרה ואסוציאטיביות של הכפל בסמיחבורה. ■

מסקנה 8.4 לכל קבוצה סינדטית למקוטעין A , הקבוצה AA^{-1} היא סינדטית.

הוכחה: מהלמה יש F סופית כך שלכל $s \in S$, יש $a \in A$ עם $sa \in F^{-1}A$, ולכן, $s \in F^{-1}Aa^{-1} \subseteq F^{-1}AA^{-1}$. הדבר נכון לכל $s \in S$, לכן $S = F^{-1}AA^{-1}$. ■

למשל, עבור הסמיחבורה $(\mathbb{N}, +)$ נקבל שלכל A סינדטית למקוטעין, $A - A$ סינדטית, עובדה שאפשר להוכיח ישירות, מכך ש $A - A$ מכילה את כל המרחקים בין איברים של A .

למה 8.5 לכל אידמפוטנט p ולכל $A \in p$, $AA^{-1} \in p$.

הוכחה: כיון ש p אידמפוטנט ו $A \in p$, יש $B \in p$ כך שלכל $b \in B$, יש $C \in p$ (בלי הגבלת כליות, $C \subseteq A$) כך ש $bC \subseteq A$ ולכן

$$b \in AC^{-1} \subseteq AA^{-1}$$

כיון שזה נכון לכל $b \in B$, $B \subseteq AA^{-1}$ ולכן $AA^{-1} \in p$. ■

מסקנה 8.6 אם A מרכזית, אז AA^{-1} מרכזית וסינדטית.

8.2 משפט ניומן

כאשר מדובר בחבורות, ההגדרות של AB^{-1} , BA^{-1} וכולי מתלכדות עם המקובל בחבורות, למשל:

$$AB^{-1} = \{ab^{-1} : a \in A, b \in B\}$$

כאשר ab^{-1} מסמן כרגיל את המכפלה בחבורה של a וההופכי של b .

למה 8.7 יהיו G חבורה, ו H תת-חבורה שלה, כך ש H סינדטית למקוטעין. אזי H מאינדקס סופי ב G , כלומר סינדטית.

הוכחה: $H = HH^{-1}$, ולכן מהמהסקנה האחרונה, H סינדטית. ■

תהי G חבורה. כיון שלכל תת-חבורה $H \leq G$ ואיברים $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$g_1Hg_2 = (g_1g_2)(g_2^{-1}Hg_2)$$

אפשר לנסח את המשפט הבא גם עבור הצגות מהצורה $G = g_1H_1g_1' \cup \dots \cup g_kH_kg_k'$.

משפט 8.8 (ניומן) תהי G חבורה, ויהיו $H_1, \dots, H_k$ תת-חבורות שלה, ו $g_1, \dots, g_k \in G$ איברים כך ש $G = g_1H_1 \cup \dots \cup g_kH_k$. אזי יש i כך ש H_i מאינדקס סופי ב G .

הוכחה: ההוכחה הבאה היא של פרוטסוב. נשים לב שאם $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ סינדטית למקוטעין, אז יש i כך ש A_i סינדטית למקוטעין. אכן, אם $A \in p$ מינימלי, אז יש i כך ש $A_i \in p$.

כיון ש G סינדטית למקוטעין, יש i כך ש g_iH_i סינדטית למקוטעין. לכן גם ההזזה שלה, H_i סינדטית למקוטעין, ומהלמה, H_i מאינדקס סופי ב G . ■

משפט ניומן אינו ניתן להכללה לסמיחבורות, אפילו לא לחלוקה של חבורה לתת-סמיחבורות:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\leq 0} \cup \mathbb{Z}_{> 0}$$

ומספר סופי של הזזות של התת-סמיחבורות $\mathbb{Z}_{> 0}$ או של $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ אינו מספיק כדי לכסות את $\mathbb{Z}$.

8.3 קבוצות ענקיות

הגדרה 8.9 תהי S סמיחבורה. $A \subseteq S$ היא קבוצת FP^+ אם החיתוך של A עם כל קבוצת FP הוא גם כן קבוצת FP . כאשר הסמיחבורה היא חיבורית, נכתוב FS^+ במקום FP^+ .

למה 8.10 התכונות הבאות שקולות:

1. A קבוצת FP^+ .
2. A חותכת כל קבוצת FP .
3. A שייכת לכל אידמפוטנט ב βS .
4. A^c אינה קבוצת FP .

הוכחה: $(2 \Leftarrow 1)$ מיידי.

$(3 \Leftarrow 2)$ יהי p אידמפוטנט. אם $A \notin p$ אז $A^c \in p$ ולכן קבוצת FP . לכן, A חותכת את A^c , סתירה.

$(4 \Leftarrow 3)$ אילו A^c היתה קבוצת FP אז היא היתה שייכת לאידמפוטנט p , בסתירה לכך ש $A \in p$.

$(1 \Leftarrow 4)$ תהי B קבוצת FP . ניקח אידמפוטנט p כך ש $B \in p$. אילו $A^c \in p$, היא היתה קבוצת FP בסתירה לנתון. לכן, $A \in p$ ולכן $A \cap B \in p$. כיון ש p אידמפוטנט, $A \cap B$ קבוצת FP . ■

מסקנה 8.11 לכל $c \in \mathbb{N}$, קבוצת FS^+ ב $(\mathbb{N}, +)$.

הוכחה: ראינו ש $c\mathbb{N}$ שייכת לכל אידמפוטנט. ■

מסקנה 8.12 יהיו $A_1, \dots, A_k$ קבוצות FP^+ ב S . אזי $A_1 \cap \dots \cap A_k$ גם היא קבוצת FP^+ .

הוכחה: לכל אידמפוטנט p , $A_1, \dots, A_k \in p$ ולכן גם חיתוכן שייך ל p . ■

ידוע גם שלכל מספר ממשי $0 < \alpha < 1$ ולכל $0 < \beta < 1$ ממשי, הקבוצה $\{\lfloor \alpha n + \beta \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$ היא FS^+ ב $\mathbb{N}$, כאשר $\lfloor x \rfloor$ מציין את החלק השלם של x מעוגל כלפי מטה (משפט 16.42 בספר של הינדמן-שטראוס), אפילו אם n רץ "רק" על פני קבוצת FS^+ . לכן, אפשר לעשות איטרציות של צורת הבניה הזאת.

למה 8.13 תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ קבוצת FS^+ . לכל c טבעי, $c^{-1}A$ היא קבוצת FS^+ .

הוכחה: נראה ש $c^{-1}A$ חותכת כל קבוצת FS . תהי $B \supseteq FS(b_1, b_2, \dots)$, כאשר $b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N}$. אזי $cb \supseteq FS(cb_1, cb_2, \dots)$ ולכן גם $cb \supseteq FS$. לכן, יש $cn \in A \cap cb$ אז $n \in c^{-1}A \cap B$. ■

למה 8.14 יהיו A קבוצת FS ו B קבוצת FS^+ ב $\mathbb{N}$. אזי יש $c \in A \cap B$, קבוצת FS $A_1 \subseteq A \setminus \{c\}$ וקבוצת FS^+ $B_1 \subseteq B \setminus \{c\}$ כך ש

$$c + A_1 \subseteq A, \quad c \cdot B_1 \subseteq B$$

הוכחה: $A \cap B$ קבוצת FS, ולכן יש $c \in A \cap B$ ו $A_1 \subseteq A \cap B \setminus \{c\}$ כך ש $c + A_1 \subseteq A \cap B$.
 תהי $B_1 = B \cap (c^{-1}B) \setminus \{c\}$. זה חיתוך של שלש קבוצות FS^+ ($\mathbb{N} \setminus \{c\}$) שייכת לכל
 על-מסנן לא ראשי, ולכן B_1 קבוצת FS^+ . $cB_1 \subseteq B$. ■

קבוצות FP^+ הן גדולות מאד. כבר אמור בפרק העוסק במשפט הינדמן, שלכל צביעה של הטבעיים במספר סופי של צבעים, יש קבוצה מונוכרומטית $A \subseteq \mathbb{N}$ שהיא גם קבוצת FP וגם קבוצת FS, כלומר, יש $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$ ו $b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N}$ שונים, כך ש

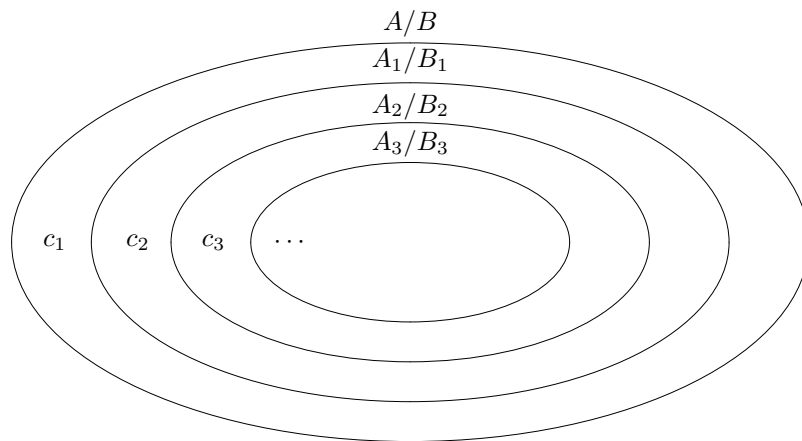
$$FS(a_1, a_2, \dots) \cup FP(b_1, b_2, \dots) \subseteq A$$

אבל הינדמן הוכיח שלא ניתן לדרוש שכל הסכומים הסופיים וכל המכפלות הסופיות של אותם איברים $a_1, a_2, \dots$ יהיו ב A . לכן, את המשפט הבא אין להבין כמשפט צביעה, אלא כמשפט הממחיש את גודלה של קבוצת FS^+ ב $\mathbb{N}$.

משפט 8.15 תהי $B \subseteq \mathbb{N}$ קבוצת FS^+ . אזי יש $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{N}$ שונים, כך ש

$$FS(c_1, c_2, \dots) \cup FP(c_1, c_2, \dots) \subseteq B$$

הוכחה: ההוכחה זהה לזו של משפט הינדמן. תהי $A = B$. נפעיל את הלמה למצוא:



$c_1 \in A \cap B$, קבוצת FS $A_1 \subseteq A \setminus \{c_1\}$, וקבוצת FS^+ $B_1 \subseteq B \setminus \{c_1\}$, כך ש $c_1 + A_1 \subseteq A$ ו $c_1 \cdot B_1 \subseteq B$

$c_2 \in A_1 \cap B_1$, קבוצת FS $A_2 \subseteq A_1 \setminus \{c_2\}$, וקבוצת FS^+ $B_2 \subseteq B_1 \setminus \{c_2\}$, כך ש $c_2 + A_2 \subseteq A_1$ ו $c_2 \cdot B_2 \subseteq B_1$

$c_3 \in A_2 \cap B_2$, קבוצת FS $A_3 \subseteq A_2 \setminus \{c_3\}$, וקבוצת FS^+ $B_3 \subseteq B_2 \setminus \{c_3\}$, כך ש $c_3 + A_3 \subseteq A_2$ ו $c_3 \cdot B_3 \subseteq B_2$

וכו'. וכו'.

הטיעון הרגיל מראה ש $FS(c_1, c_2, \dots) \subseteq A$ ו $FP(c_1, c_2, \dots) \subseteq B$. כיון ש $A = B$, סיימנו. ■

תרגיל 1: הוכח שלכל צביעה נתונה של הטבעיים, אפשר לדרוש בנוסף, במשפט האחרון, ש $FS(c_1, c_2, \dots)$ מונוכרומטית.

8.4 משפט פרוטסוב

למה 8.16 תהי G חבורה, ותהי $A \subseteq G$ סינדטית. אזי AA^{-1} היא קבוצת FP^+ .

הוכחה: ניקח $F \subseteq G$ סופית כך ש $F^{-1}A = G$ ולכן

$$G = G^{-1} = A^{-1}F$$

יהי p אידמפוטנט. $G \in p$, לכן יש $t \in F$ כך ש $A^{-1}t \in p$. מלמה 8.5,

$$AA^{-1} = (At)(At)^{-1} \in p$$

■

משפט 8.17 (פרוטסוב) תהי G חבורה אינסופית. לכל צביעה של אברי G במספר סופי של צבעים, יש קבוצה מונוכרומטית A כך ש:

1. A סינדטית למקוטעין וגם קבוצת FP .

2. AA^{-1} סינדטית.

3. $AA^{-1}AA^{-1}$ קבוצת FP^+ .

4. יש n טבעי כך ש $(AA^{-1})^n$ היא תת-חבורה מאינדקס סופי של G (וגם קבוצת FP^+).

הוכחה: יהי p אידמפוטנט מינימלי לא ראשי ב βG . תהי $A \in p$ מונוכרומטית. A מרכזית, לכן סינדטית למקוטעין וגם קבוצת FP . זה נותן את (1), שממנו (2) נובע, בעזרת המשפטים לעיל.

(3) נובע מ (2), בעזרת הלמה האחרונה.

(4) תהי $\langle AA^{-1} \rangle$ החבורה הנוצרת על ידי AA^{-1} . הקבוצה

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (AA^{-1})^n$$

מכילה את AA^{-1} וסגורה תחת הופכי וכפל. לכן, היא שווה ל $\langle AA^{-1} \rangle$. לכל n , $(AA^{-1})^n \subseteq (AA^{-1})^{n+1}$.

מ(2), יש $G \supseteq F$ סופית כך ש $F = F(AA^{-1})$. לכן,

$$\langle AA^{-1} \rangle = G \cap \langle AA^{-1} \rangle = F(AA^{-1}) \cap \bigcup_{n=2}^{\infty} (AA^{-1})^n = \left(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (AA^{-1})^n \right) AA^{-1}$$

כיון ש F סופית, יש N כך ש $F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (AA^{-1})^n = F \cap (AA^{-1})^N$ ולכן

$$\begin{aligned} \langle AA^{-1} \rangle &= \left(F \cap (AA^{-1})^N \right) AA^{-1} = F(AA^{-1}) \cap (AA^{-1})^{N+1} = \\ &= G \cap (AA^{-1})^{N+1} = (AA^{-1})^{N+1} \end{aligned}$$

האינדקס של $\langle AA^{-1} \rangle$ ב G סופי, משום שהיא מכילה את הקבוצה הסינדטית AA^{-1} . ■
 $\langle AA^{-1} \rangle$ היא קבוצת FP^+ כי היא מכילה את $AA^{-1}AA^{-1}$.

פרקים נוספים

יש באמתחתי מקטעים של פרקים נוספים, הכוללים את משפט רוט (שהוא מקרה מיוחד של משפט סמרדי), הגישה האלגברית לטופולוגיה דינמית, ומשפט סקיפרס (משפט רמזי על צביעות של כיסויים "עשירים" של מרחבים טופולוגיים). אי"ה, אערוך אותם ואוסיפם בעתיד. רצוי לבקר באתר הספר מדי פעם, ולבדוק האם יש עידכון.