סוכה עגולה II

דוד גרבר, בועז צבאן
המכון הגבוה לתורה והמחלקה למתמטיקה
בר-אילן

בעקבות פרסום מאמרנו ״סוכה עגולה״ בקובץ ״מגל״ הקודם, הגיע למערכת מכתב[1] מאת הרה״ג מאיר מאזוז, ראש ישיבת ״כסא רחמים״, בני ברק. במכתב זה שתי הערות מאירות עיניים בנוגע למאמרנו הנ״ל; והיות שלא מצאנו כמותן במאמרים המוכרים, חשבנו שראוי להביאם כאן עם ביאור ופירוט. כמו כן, רצינו לנצל הזדמנות זו, ולהציג בפני הקורא שיטה מקורית ומפתיעה להסבר סוגיית ״סוכה העשויה ככבשן״ כך שדברי רבי יוחנן מדוייקים **לחלוטין** (שיטת הרב סתהון; נדון בה בחלק ג׳).

א. על היחס שבין ״קוה״ ו״קו״. כותב הרב מאזוז: ״בין השאר ראיתי בסוף עמ׳ 118 שהערך ...3.14 לאורך המעגל נרמז בתנ״ך בקרי וכתיב שיש באותו פסוק שממנו למדה הגמרא את הערך ההלכתי, כי כתיב ״קוה״ וקרי ״קו״ (במלכים א׳ ז׳ כ״ג), והיחס שבין 106 ל-111 (קו לקוה) הוא היחס שבין 3 ל- ...3.14 (היינו בין הערך ההלכתי לערך המתמטי). עד כאן תוכן הדברים. אולם כבר העירותי במקום אחר בס״ד, שאם כי זו הברקה מעניינת מאד, מכל מקום אינה אמת, כי הכתיב ״קוה״ במקום ״קו״ מופיע עוד בשני מקומות בתנ״ך (ירמיה ל״א ל״ח: ויצא עוד ק ו ה המדה נגדו. זכריה א׳ ט״ז: ו ק ו ה ינטה על ירושלים) ובשני המקומות אין מדובר בקו עיגול כלל, אלא בקו ישר[2]״.

במקום אחר ⟦6⟧ הערנו לגבי נקודה זו, שרבים הקשו עליה, שאם אכן הקרי וכתיב בספר מלכים באים ללמדנו ערך מדוייק יותר של π, הרי שאין טעם ללמד **אותו דבר** בירמיה ובזכריה, ובהכרח צריך להיות שם לימוד שונה[3]. הרב מתתיהו הכהן מונק ⟦4⟧ מתרץ קושיה זו על דרך הסוד: ״יש לנו לשאול: מדוע נשתנו הערכים שעסקנו בהם לעניין ההלכה מן הערכים במציאות שלנו? בודאי יש סוד בדבר זה; ורק הבא בסוד ה׳ ידע להשיב על שאלה זו תשובה ממצה. אבל מה שהעלינו במאמר זה מגלה לנו שמץ מסוד זה. לדעתי אין זה מקרה, כי הערכים הנ״ל נלמדים מחלק עגול של כלי שהיה בתחום בית המקדש. גם קושיית התוספות הנ״ל בעירובין י״ד ע״א לעניין ספר תורה עגול שמונח בארון, נשאלה לעניין כלי שהיה במקום בית המקדש. ושאלו: הרי מידות הספר, לפי חכמי המידות, גדולות מן המידות הנזכרות בש״ס. רצו בעלי התוספות לומר, שהערכים בבית המקדש ובתחומו היו באמת כמו שהם נזכרים בפסוק[4]. ומסתבר, שבעלי התוספות פירשו הגמרא בעירובין כמפרשי הגמרא הנ״ל[5] ... קושיית בעלי התוספות באה להדגיש הבדל הערכים בין כלים שהיו בתחום בית המקדש ובין כלים מחוץ לתחומו. ומשום שלא רצו בעלי התוספות להתעמק בסוד העניין, היה להם די להזכיר הבדל זה. ואין לנו אלא להוסיף, כי תחום בית המקדש היה מקום שהשכינה שרתה בו. וכמו שמצאנו באבות פ״ה מ״ה, שנעשה נס בחלל העזרה ׳עומדים צפופים ומשתחווים רווחים׳[6] כן נוכל לומר, שחלל תחום בית המקדש היה משונה גם מבחינה זו שיחס העיגול למרובע החוסם אותו ולקוטרו היה שונה ממה שהוא בעולמנו-אנו. ומשום שעניין התורה הוא לאחד עולמות עליונים עם העולם התחתון, מתקבל על הדעת שהערכים בתחום השכינה היו כערכים שניתנו לנו להלכה. ומשום שתפקידנו לאחד העולמות העליונים עם העולם התחתון, יש לנו להשתמש בעולמנו-אנו בערכים שהיו קיימים בתחום בית המקדש. רק כדי להבין איך להשתמש

[1] נכתב ביום ששי, כ״ח באדר ה׳תשנ״ד.

[2] ולכן הלימוד הנ״ל אינו שייך שם (הערת הכותבים).

[3] טענתנו שונה מעט מטענתו של הרב מתתיהו הכהן מונק (הוגה רעיון הקרי וכתיב כמייצגים את הערך המקורב של π) שאומר ב ⟦3⟧, ⟦4⟧, שאין הכרח לפרש תמיד את הבדלי הקרי והכתיב באותו אופן.

[4] ואמנם אין לתמוה על רעיון זה, שכן היחס π אינו מתקיים בכל העולמות האפשריים. למעשה, חכמי הפיסיקה המודרנית מלמדים אותנו שהיחס – בתנאים מסויימים – עשוי להיות שונה מאד מ π. על כך בהרחבה, אי״ה, ב ⟦5⟧.

[5] עיין במאמרו שם, בעיה א.

[6] עיין ⟦2⟧, הערה 20, וכן ראה ⟦5⟧.

בערכים אלה בעולמנו, יש לנו להפוך את העיגול לצורות קוים ישרים, שיש להם ערכים המתאימים לערך העיגול עצמו בתחום בית המקדש. ולגלות לנו הבדל זה שבין עולם ההלכה לעולם התחתון, צריכים אנו לכתיב בצד הקרי לעניין שני הקוים שהם שונים זה מזה. ועל ידי הבדל זה אפשר גם לפרש הקראים והכתיבים (שהזכרתי למעלה) בירמיה ל"ו, ל"ח: 'ויצא עוד קו(ה) המדה' ובזכריה א, ט"ז: 'וקו(ה) ינטה על ירושלים', באופן שרומזים לשינוי מ'קוה' ל'קו' כשתיבנה ירושלים במהרה בימינו, אמן".

עד היום תקפו רבים רעיון זה של הרב מונק, רובם על בסיס ספקני[7], אולם ללא הצעת הסבר אלטרנטיבי לקרי וכתיב הנ"ל. הרב מאזוז, במכתבו הנ"ל, הוא כנראה הראשון שמציע הסבר, על דרך הפשט, שמתרץ את הקושיה כולה: " ... אולם נראה ברור ששרש המלה 'קו' הוא 'קוה' מנחי ל"ה, והעד: 'את תקות חוט השני הזה' (יהושע ב' י"ח). והכתיב 'קָוֶה' הוא בפלס קָנֶה, חָזֶה, חָזֶה, ועוד. ואחר כך נתכווצה המלה ונעשתה משרש 'קוו' מן הכפולים, ולכן אומרים 'קַוִּים' הוי"ו דגושה, וכן 'בכל הארץ יצא קַוָּם' (תהלים י"ט ה'). וכיוצא בזה קרה בשרש 'חיה' שהוא מנחי ל"ה, ויש 'חיי' מן הכפולים (כמו וארפכשד חַי, בפלס תַּם, סַב, וכדומה). ואכמ"ל".

לאור דברי הרב מאזוז, נשאלת השאלה, האם נותר מקום להסברו המקורי של הרב מונק. לבירור נקודה זו, יש לענות על שתי שאלות: האחת, האם ייתכן (מבחינה הסתברותית) כי היחס הנתון ע"י הקרי והכתיב הוא מקרי; והשניה, באיזו מידה מותר לנו לדרוש כתוב, כאשר ישנו הסבר מספק על דרך הפשט.

השאלה הראשונה היא שאלה קשה מאד מבחינה מתמטית, וייתכן שאין לה פתרון כלל, אם כי מספר מבחנים מתמטיים מחזקים את ההשערה, שאין זה מקרה [[7, 9]]. הרב מונק [[3]] מעיר, **שריבוי המלים** בפסוק, שנאמר בו ברישא 'עגול סביב' ובסיפא 'וקו(ה) שלשים באמה יסוב אותו סביב' (ולא הסתפק באמירה כגון 'עגול סביב שלשים באמה') מראה שהכתוב התכוון למסור פרט **נוסף** לקביעת ההיקף. היות שמדובר בערכים מספריים, יש לנו לחפש בערך המספרי של המלים המופיעות בייתור-לכאורה: קו ו-קוה[8].

לגבי השאלה השניה, נביא את דברי הרב מונק [[3]]: "המשמעות של הקרי והכתיב שלפנינו מתאשרת על ידי התלמוד הירושלמי במסכת מגילה (א, ב). שם מסביר רב ירמיה את הפסוק 'הכל בכתב מיד ה' עלי השכיל כל מלאכת התבנית' (דברי הימים א, כ"ח, י"ט). פסוק זה נאמר על ידי דוד לבנו שלמה אחרי שנתן לו את ההוראות בענין בנית המקדש ובענין עשיית כלים שונים למקדש בתוספת לכלי המשכן. לפסוק זה אומר הירושלמי: רבי ירמיה בשם רבי שמואל בר רב יצחק, מגילה שמסר שמואל לדוד ניתנה להידרש. מה טעמא? 'הכל בכתב' – זו המסורת, 'מיד ה' ' – זו רוח הקודש, 'עלי השכיל' – מכאן שניתנה להידרש'. רואים אנו מכאן כי שמואל מסר לדוד מגילה כתובה והוא מסרה והסבירה לבנו שלמה. בעל 'קרבן העדה' נותן לנו הסבר מלא יותר לדברי רבי ירמיה. ואלה דבריו: 'הכל בכתב – מגילה שמסר שמואל לדוד שהיה כתוב בה תבנית בית המקדש שמסרה הקב"ה למשה וממשה ליהושע ויהושע לזקנים ומזקנים לשמואל, ושמואל מסרה לדוד. וכשמסרה דוד לשלמה בנו אמר לו: הכל בכתב מיד ה' עלי השכיל. זו המסורת – מלא וחסר **קרי וכתיב**, דאי לא תימא הכי, למה מסרה בכתב ולא בעל-פה? מיד ה' – זו רוח הקדש, שיש בה דברים מסותרים על פי הסוד. עלי השכיל – דלהשכיל משמע להבין דבר מתוך דבר. שמע מינה שניתנה להידרש'. מדברי הירושלמי האלה מסתבר שהקטע במלכים א, המתייחס לבניין המקדש, הועתק ממגילה זו שקיבל משה בסיני. הסברו של הירושלמי כי 'הכל בכתב' מתיחס **למסורה** (**בכתב**) מגלה לנו, איפוא, את משמעותו של הקרי והכתיב במלכים א".

ואלו ואלו דברי אלוקים חיים.

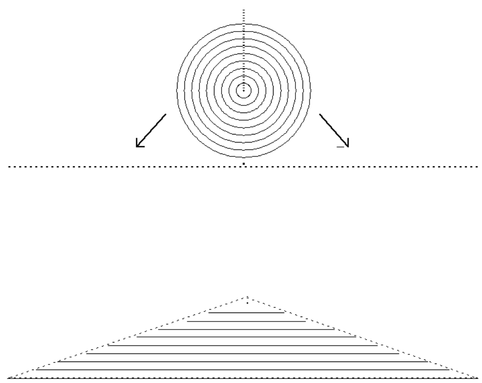
---

[7] ראה דיון על כך ב [[5]].

[8] דרך העולם היא להעריך "שגיאות" מספריות על ידי יחסים (פרופורציות); וכך אכן מבצע הרב מונק את שיחזור הערך המקורב $3\frac{15}{106}$ עבור π.

ב. על קושית ה"חוות יאיר" להוכחה בתוספות[9]. כותב הרב מאזוז: "זכורני שלמדנו דברי החוות יאיר עם התלמידים הי"ו ואמרתי להם שאין קושיותיו נכונות כלל במחכ"ת, ואחר כך ראיתי שעמד עליהן ר' ישראל זאמושטש בספר נצח ישראל על הש"ס בקונטרס אחרון על מסכת עירובין (בסוף הספר)". נביא כאן בקצרה את הבנת ה"נצח ישראל" בהוכחת התוספות ונסביר כיצד היא עומדת במבחן הקושיות של ה"חוות יאיר".

ראשית נביא את ההוכחה ואת קושיית ה"חוות יאיר" עליה בקיצור נמרץ. לפרטים ראה [6, 10]. ההוכחה מבוססת על מציאת שטח העיגול באמצעות "חיתוך חוטים":



אפשר להתיחס לשטח העיגול כמורכב ממעגלים ("חוטים") רבים. נחתוך את החוטים לאורך מחוג העיגול (כבציור) ונפרוש אותם לאורך הישר המשיק. נקבל משולש, שאת שטחו קל לחשב, והוא חצי מכפלת בסיסו בגובהו. היות שבסיס המשולש התקבל מפריסת המעגל החיצוני, וגובהו הוא כמחוג המעגל, הרי שטחו (ששוה לשטח העיגול!) הוא מחצית מכפלת היקף העיגול במחוגו (במונחים מתימטיים, $S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$).

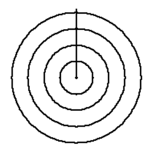
ה"חוות יאיר"[10] תוקף את דרך ההוכחה, בהראותו שעבור משושה וריבוע השיטה אינה עובדת. למשל במקרה של ריבוע, אם נחתוך את החוטים לאורך האלכסון נקבל תוצאה גדולה יותר מאשר אם נחתוך אותם לאורך מרכז הריבוע:

[9] מקור ההוכחה הוא ב"חיבור המשיחה והתשבורת" לראב"ח הנשיא (1116 למ'). לדיון מפורט ראה [6, 10].

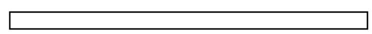
[10] סימן קע"ב, החל במלים "מה שאני מתקשה בהמצאת התוספות ... הוא בהמצאת חתיכת החוטין". לפירוט ראה [1, 10].

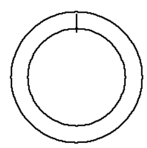
מעניין לראות כיצד השפיעה התקפת ה"חוות יאיר" על ה"חתם סופר"[11] עד כדי כך שהוא "מהסס לבנות בנין על פי הוכחת התוספות"[12] ואלו דברי ה"חתם סופר": והנה בתוספות סוכה ח' ע"א כתב, שאין ללמוד חוט המקיף מגוף הקרקע, כי אין להם עניין זה על זה ע"ט (עיין שם?) חבל (אבל?) איך אפשר להכחיש החוש. וראיתי ב"חוות יאיר" סימן קע"ב דף קס"ד ע"א, שהרבה להקשות על הך כללא של תוספות, מ"ש מגוף הקרקע ע"י חתיכת החוטין, וכל דבריו שם נכונים לכאורה, עיין שם היטב. על כן לא נראה לי להעמיד יסוד כלל על הך כללא דגוף הקרקע שכתבו תוספות, ונראה לי שכל דבריהם שבפרק ערבי פסחים הוא על יסוד דחוט המקיף המרובע הוא יתר רביע על חוט המקיף העיגול.

כאמור, ה"נצח ישראל" מביא הבנה בשיטת "גזירת החוטים", שלפיה לקושיית ה"חוות יאיר" אין מקום כלל. הבנה זאת אינה מבוססת כל צרכה מבחינה מתמטית, אולם היא נכונה[13]. תמצית הרעיון הוא, שלחוטים **יש עובי** מסויים; וכל עובי שנבחר ייתן את אותה התוצאה. במקרה של העיגול:

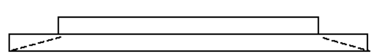


ציור 1

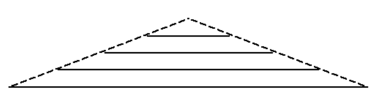
כל חוט נראה במקור כך:  , ולאחר שהניחוהו על שטח העיגול הוא נראה כך:



כתוצאה מכך התכווצה שפתו הפנימית, ולכן נתמעט שטחו. לכן, כשאנו פותחים את החוט – ואיננו רוצים שיתוסף שטח – יש להוריד מן החוט את אותו השטח שנתמעט בעת קיפולו. היות ששפתו הפנימית של החוט התכווצה בעת קיפולו לאורך השווה לאורך שפתו החיצונית של החוט הבא מייד אחריו (ראה ציור 1), הרי שיש להוריד מן החוט שני משולשים, כך שאורך שפתו הפנימית יהיה שוה לאורך שפתו החיצונית של החוט הבא אחריו:



והוא הדין לגבי החוט הבא אחריו, עד שמתקבל המשולש:



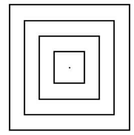
ומכאן מוצאים את שטח המשולש. שטח זה שווה לשטח העיגול, כיון שהורדנו את העודף.

[11]שו"ת "חתם סופר", חלק אורח חיים, סימן קנ"ג, ד"ה "והנה". מקור זה נמסר לנו על ידי הרב מאזוז, במכתב מערב יום כיפור ה'תשנ"ה.

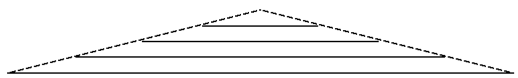
[12]לשון הרב מאזוז, שם.

[13]הביסוס המתמטי יכול להתבצע באותו אופן שביססנו את ההוכחה עצמה ב [10], וראה גם [1].

היות שעובי החוטים נקבע **מראש**, אפשר להפעיל שיטה זאת גם על המשושה והריבוע מבלי לקבל את הסתירה שמקבל ה"חוות יאיר". נדגים זאת עבור המקרה של הריבוע:



שוב, קיפול החוט גרם להתכווצות שפתו הפנימית כך שאורכה יהיה כאורך שפתו החיצונית של החוט הבא. לכן, ואין זה משנה איך נחתוך את החוטים, נקבל לאחר חיתוכם את המשולש:



כאשר גובה המשולש, הנקבע על ידי עובי החוטים ומספרם, הוא בדיוק חצי גובה הריבוע. לכן מתקבל השטח המדוייק של הריבוע.

הסתירה שקיבל ה"חוות יאיר" מאפיינת מקרים שבהם מטפלים בגדלים אינפיניטסימליים (=קטנים באופן אינסופי) בצורה נאיבית. הגישה הנכונה היא לייחס לגדלים עובי מסויים[14].

ג. פתרון סוגיית "סוכה העשויה ככבשן" ברמת דיוק של 100% [15]. הסבר זה מביא הרב חיים סתהון בשם אביו הרב מנשה סתהון[16]. הרב סתהון מתאר דרך ליישב את סוגיית "סוכה העשויה ככבשן" כך שדברי רבי יוחנן, לשיטת רב אסי, יוצאים מדוייקים לחלוטין: השיטה שבה חישבו חז"ל שורשים של מספרים היתה שונה מהשיטה המקובלת כיום, ובה השתמשו חכמי ההנדסה הקדמונים. לפי שיטה זו, אם ברצוננו לחשב את שרשו של מספר מסויים k, עלינו למצוא ראשית את המספר n כך ש $n^2<k<(n+1)^2$, ואז $\sqrt{k}$ יהיה בקירוב

$$n + \frac{k-n^2}{(n+1)^2-n^2} = n + \frac{k-n^2}{2n+1}$$

כדי למצוא אלכסונו של ריבוע שאורך צלעו a, עלינו למצוא (לפי "משפט פיתאגורס") את $\sqrt{a^2+a^2}$. נפעיל שיטת חישוב זו למקרה של סוכת רבי. אורך צלע הריבוע הוא ד' אמות, כלומר $a=4$. לכן, $2a^2=32$ ועלינו לחשב את $\sqrt{32}$. $5^2=25<32<36=6^2$. לכן, $\sqrt{32} \approx 5+\frac{32-25}{36-25}=5\frac{7}{11}$. נוסיף לשיעור זה את שתי האמות שתופס מקום האנשים לשיטת רב אסי (אמה מכל צד), ונקבל שרוחב העיגול שבו דיבר רבי יוחנן הוא $7\frac{7}{11}$ אמות. כעת, כדי למצוא את היקף העיגול שבו דיבר רבי יוחנן, יש לחשב את הביטוי $7\frac{7}{11}\times\pi$. לשיטת הרב סתהון, הקירוב שבו השתמש רבי יוחנן הוא $3\frac{1}{7}$, שהוא הקירוב המפורסם ביותר עבור π, והיה ידוע לקדמונים[17]. לכן, היקף העיגול שבו דיבר רבי יוחנן הוא $7\frac{7}{11}\times3\frac{1}{7}=24$ בדיוק, לא פחות ולא יותר. והדברים נפלאים[18].

---

[14] אם כי אפשר להניח שהוא קטן מכל עובי ממשי. להנחה זאת, שהיא תמוהה לכאורה, יש מיסוד מתמטי (שהתגלה רק במאה הנוכחית, על ידי המתמטיקאי אברהם רובינסון). ליישום גדלים אינפיניטסימליים לעניננו ראה [10].

[15] להצגת הסוגיה, בליווי ציורים, ראה [2].

[16] בספרו "ארץ חיים", פרק "כיבוד אב", עמ' 10-6. הספר נדפס בתרס"ח. לשם נוחיות וקיצור, נשתמש בהמשך בסימונים מתמטיים.

[17] הרמב"ם ב"פירוש המשניות", עירובין פרק א' משנה ה', כותב: "ודרך המופת בזה הקירוב, אשר עליו סומכין חכמי החכמות הלימודיות, הוא ייחוס האחד לשלשה ושביעית". קירוב זה מופיע גם ב"משנת המידות", חיבור עברי קדום, שזמן חיבורו לא נודע (יש מחלוקת, האם נכתב באמצע המאה השניה למ', או באמצע המאה התשיעית למ' [8]).

[18] הקורא המתעניין בנושא המעגל והעיגול בתלמוד מוזמן לפנות ל"ארץ חיים" (שם), ולראות מה אומר הרב סתהון בנוגע לדיוק השיעורים.

מקורות

⟦1⟧ **תרוץ על קושית החוות יאיר בענין מדידת שטח העיגול**, הרב מיכאל בלייכר, קובץ חידושי תורה ופרפראות לחכמה, חוברת א׳, מכון גבוה לטכנולוגיה, ירושלים, עמ׳ 87–79.

⟦2⟧ **סוכה עגולה**, דוד גרבר ובועז צבאן, מגל, חוברת י, המכון הגבוה לתורה, בר–אילן, טבת ה׳תשנ״ד, עמ׳ 134–117.

⟦3⟧ **דרכיה של ההלכה בפתרון בעיות גאומטריות מיוחדות**, הרב מתתיהו הכהן מונק, הדרום, חוברת כ״ז, ניסן ה׳תשכ״ח, עמ׳ 133–115.

⟦4⟧ **שלש בעיות הנדסיות בתנ״ך ובתלמוד**, הרב מתתיהו הכהן מונק, סיני, מוסד הרב קוק, תמוז ה׳תשכ״ב, עמ׳ רי״ח–רכ״ז.

⟦5⟧ **על היחס שבין היקף עיגול לקוטרו**, בועז צבאן (בהכנה).

⟦6⟧ **כל שיש בהיקפו**, בועז צבאן ודוד גרבר, הגיון, חוברת ג׳, ה׳תשנ״ה (טרם פורסם).

אנגלית

⟦7⟧ **On the Rabbinical Exegesis of an Enhanced Biblical Value of** π, Edward Shlomo G. Belaga, Proceedings of the XVIIth Canadian Congress of History and Philosophy of Mathematics, Queen's University, May 1991.

⟦8⟧ **A History of Mathematics: An Introduction**, Victor J. Katz, HarperCollins College Publishers, 1993, p. 152.

⟦9⟧ **On the Rabbinical Approximation of** π, Boaz Tsaban and David Garber (in preparation).

⟦10⟧ **The Proof of Rabbi Abraham Bar Hiya Hanasi**, Boaz Tsaban and David Garber (in preparation).