

## אלגברה לינארית 2 (88-113-04) מבחן לדוגמא

מרצה: ד"ר רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אסור להשתמש בכל חומר עזר, פרט למחשב-כיס פשוט.  
את שאלה מס' 1 יש לפתור באופן מפורט במחברת.  
על יתר השאלות יש לענות במקומות המסומנים בשאלון עצמו; ניתן להשתמש כטיוטה לחישובים במחברת הבחינה.  
כל סעיף של כל שאלה מזכה ב- 5 נקודות. בבחינה זו 21 סעיפים (מספיק לענות על 20 מתוכם).  
בסיום הבחינה -- נא למסור את השאלון ואת מחברת הבחינה.

*בהצלחה!*

1. יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל  $\mathbf{C}$ , ויהי  $T: V \rightarrow V$  אופרטור לינארי שהוא גם אנטי-הרמיטי וגם אוניטרי.  
I. הוכח שהערכים העצמיים של  $T$  הם מתוך הקבוצה  $\{i, -i\}$ .  
II. האם האופרטור  $T + iI$  ניתן לליכסון? נמק היטב.

2. תהי  $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  העתקה לינארית שהצגתה בבסיסים הסטנדרטיים של  $\mathbf{R}^4$ ,  $\mathbf{R}^3$  היא על-ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

אזי:

I.  $\dim(\ker T) = \underline{\hspace{2cm}}$

II.  $\dim(\operatorname{im} T) = \underline{\hspace{2cm}}$

III. האם יש בסיסים של  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{R}^4$  שבהם הצגת  $T$  הנ"ל היא על-ידי המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} ?$$

תשובה: כן \ לא (סמן בעיגול).

3. נתון שלאופרטור לינארי  $T: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$  יש פולינום אופייני  $f_T(x) = x^5 + x^4 - 2x^3$ . אזי:

- I. הערכים העצמיים של  $T$  הם: \_\_\_\_\_  
II.  $T$  ניתן לליכסון: כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).  
III.  $T$  אופרטור הפיך: כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).  
IV.  $T$  ניתן למישלוש: כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).

4. יהי  $W = \text{span} \{ (2,1,-1), (3,4,0) \}$  תת-מרחב של  $V = \mathbb{R}^3$ . מצא בסיס אורתונורמלי  $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$  עבור  $W$  (ביחס למכפלה הפנימית הרגילה של  $\mathbb{R}^3$ ):

$$\vec{e}_1 = \text{_____} \quad \text{I.}$$

$$\vec{e}_2 = \text{_____} \quad \text{II.}$$

5. יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  ותהי

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ b & a+b & a \\ a & b & a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

אזי:

I. הפיכה  $A \Leftrightarrow a+b \neq 0$  : נכון \ לא נכון (סמן בעיגול).

II. סימטרית  $A \Leftrightarrow a=b$  : נכון \ לא נכון (סמן בעיגול).

III. נורמלית  $A \Leftrightarrow a=b$  : נכון \ לא נכון (סמן בעיגול).

6. יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$ , ויהיו  $\vec{v}, \vec{w} \in V$ . אזי:

I.  $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| \Leftrightarrow \vec{v}, \vec{w}$  תלויים לינארית : נכון \ לא נכון (סמן בעיגול).

II. הוקטור  $\vec{v} + \vec{w}$  ניצב לוקטור  $\vec{v} - \vec{w}$   $\Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$  : נכון \ לא נכון (סמן בעיגול).

III. אם  $\{ \vec{v}, \vec{w} \}$  היא קבוצה אורתונורמלית אז  $\frac{1}{7}(3\vec{v} + 4\vec{w})$  הוא וקטור יחידה :  
נכון \ לא נכון (סמן בעיגול).

7. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

אזי:

$$\det A = \text{_____} \quad \text{I.}$$

$$\det(\text{adj } A) = \text{_____} \quad \text{II.}$$

8. יהי  $T$  אופרטור לינארי עם פולינום אופייני  $f_T(x) = x^2(x+1)^4(x-2)$ .

I. מספר צורות ג'ורדן האפשריות עבור  $T$  הוא: \_\_\_\_\_.

II. אם ידוע גם שהפולינום המינימלי של  $T$  הוא  $m_T(x) = x(x+1)^2(x-2)$ , אז מספר צורות

ג'ורדן האפשריות עבור  $T$  הוא: \_\_\_\_\_.