שאלון סגור

מספר סידורי: 1001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"ג (מועד ב')
יום שני, ד' באלול ה'תשס"ג (1.9.03 למ')

מספר קורס: 88-112.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$
$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$
$$\det(A) = |A|$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$

אופרטור לינארי = העתקה לינארית
לכסינה = ניתנת לליכסון

$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$

אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \ldots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן לליכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \ldots, v_n$. הוכח ש $C = A^tA$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. נתבונן במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.

2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\det(A+B)=0$, $\det(AB)=1$.
4. $\det(A+B)=1$, $\det(AB)=0$.

שאלה 2. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת לליכסון (מעל $\mathbb{R}$).
3. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A=\pm I$.
4. אם A סימטרית ו $A^2=I$ אזי A אורתוגונלית.

שאלה 3. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
2. אם A אוניטרית אזי $|\lambda|=1$.
3. אם $A^2=A$ אזי $\lambda=1$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 4. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t=-A$, אזי בהכרח:

1. $\det(A)=0$.
2. $I-A$ סימטרית.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $\mathrm{tr}(A)=0$.

שאלה 5. יהי $B=\{v_1=(1,1,i),v_2=(i,i,0),v_3=(1,0,0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E=\{u_1,u_2,u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\mathrm{span}(u_1)=\mathrm{span}(v_1)$ וכן $\mathrm{span}(u_1,u_2)=\mathrm{span}(v_1,v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. $u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$.
2. $u_1=(1,1,i)$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)$.
3. $u_1=(1,1,i)$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-2)$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 6. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
2. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
3. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
3. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.
4. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.

שאלה 8. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי:

1. 2 הוא ערך עצמי של A.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. 1 הוא ערך עצמי של A.
4. A ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1002

מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"ג (**מועד ב'**)

יום שני, ד' באלול ה'תשס"ג (1.9.03 למ')

מספר קורס: 88-112.

מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.

חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.

הנחיות:

א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.

ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.

ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).

ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$\begin{aligned}
F^{n\times 1} &= F^n \\
F^{m\times n} &= M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) \\
\det(A) &= |A| \\
\mathrm{tr}(A) &= \mathrm{Tr}(A) \\
\text{אופרטור לינארי} &= \text{העתקה לינארית} \\
\text{לכסינה} &= \text{ניתנת ללכסון} \\
A^* &= A^H = \bar{A}^t \\
\text{אוניטרית} &= \text{יוניטרית}
\end{aligned}$$

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב׳.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \ldots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן ללכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע״י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \ldots, v_n$. הוכח ש $C = A^t A$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות).
סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
2. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.

שאלה 2. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. A ניתנת לליכסון (מעל $\mathbb{R}$).
3. 1 הוא ערך עצמי של A.
4. 2 הוא ערך עצמי של A.

שאלה 3. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
2. אם $A^2 = A$ אזי $\lambda = 1$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. אם A אוניטרית אזי $|\lambda| = 1$.

שאלה 4. יהי $B = \{v_1 = (1,1,i), v_2 = (i,i,0), v_3 = (1,0,0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\text{span}(u_1) = \text{span}(v_1)$ וכן $\text{span}(u_1, u_2) = \text{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$.
3. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-2)$.
4. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)$.

שאלה 5. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
2. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.

שאלה 6. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t = -A$, אזי בהכרח:

1. $\mathrm{tr}(A) = 0$.
2. $\det(A) = 0$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $I - A$ סימטרית.

שאלה 7. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
2. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A = \pm I$.
3. אם A סימטרית ו $A^2 = I$ אזי A אורתוגונלית.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 8. נתבונן במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = 0$, $\det(AB) = 1$.
2. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.
3. $\det(A+B) = 1$, $\det(AB) = 0$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1003
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב׳ ה׳תשס״ג (**מועד ב׳**)
יום שני, ד׳ באלול ה׳תשס״ג (1.9.03 למ׳)

מספר קורס: 112-88.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א׳ מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב׳ הוא רב־ברירתי (״אמריקאי״). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$
$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$
$$\det(A) = |A|$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$

אופרטור לינארי = העתקה לינארית

לכסינה = ניתנת לליכסון

$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$

אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \ldots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן ללכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \ldots, v_n$. הוכח ש $C = A^t A$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
2. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.

שאלה 2. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
3. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.
4. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.

שאלה 3. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם $A^2 = A$ אזי $\lambda = 1$.
3. אם A אוניטרית אזי $|\lambda| = 1$.
4. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).

שאלה 4. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t = -A$, אזי בהכרח:

1. $\det(A) = 0$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\operatorname{tr}(A) = 0$.
4. $I - A$ סימטרית.

שאלה 5. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. 2 הוא ערך עצמי של A.
3. A ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
4. 1 הוא ערך עצמי של A.

שאלה 6. יהי $B = \{v_1 = (1,1,i), v_2 = (i,i,0), v_3 = (1,0,0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\text{span}(u_1) = \text{span}(v_1)$ וכן $\text{span}(u_1, u_2) = \text{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)$.
4. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-2)$.

שאלה 7. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A = \pm I$.
4. אם A סימטרית ו $A^2 = I$ אזי A אורתוגונלית.

שאלה 8. נתבונן במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.
2. $\det(A+B) = 0$, $\det(AB) = 1$.
3. $\det(A+B) = 1$, $\det(AB) = 0$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1004
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"ג (מועד ב')
יום שני, ד' באלול ה'תשס"ג (1.9.03 למ')

מספר קורס: 112-88.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$
$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$
$$\det(A) = |A|$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$

אופרטור לינארי = העתקה לינארית
לכסינה = ניתנת לליכסון

$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$

אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \dots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \dots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן לליכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \dots, v_n$. הוכח ש $C = A^tA$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \dots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהי $B = \{v_1 = (1, 1, i), v_2 = (i, i, 0), v_3 = (1, 0, 0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\operatorname{span}(u_1) = \operatorname{span}(v_1)$ וכן $\operatorname{span}(u_1, u_2) = \operatorname{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$.
3. $u_1 = (1, 1, i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, -2)$.
4. $u_1 = (1, 1, i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 0)$.

שאלה 2. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח :

1. אם $A^2 = A$ אזי $\lambda = 1$.
2. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
3. אם A אוניטרית אזי $|\lambda| = 1$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 3. נתבונן במטריצות הבאות :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

אזי :

1. $\det(A+B) = 0$, $\det(AB) = 1$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\det(A+B) = 1$, $\det(AB) = 0$.
4. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.

שאלה 4. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי :

1. A ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
2. 2 הוא ערך עצמי של A.
3. 1 הוא ערך עצמי של A.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 5. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח :

1. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
2. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A = \pm I$.
3. אם A סימטרית ו $A^2 = I$ אזי A אורתוגונלית.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 6. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t = -A$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. $\det(A) = 0$.
3. $\mathrm{tr}(A) = 0$.
4. $I - A$ סימטרית.

שאלה 7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.
4. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).

שאלה 8. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.
3. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
4. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1005
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב׳ ה׳תשס״ג (מועד ב׳)
יום שני, ד׳ באלול ה׳תשס״ג (1.9.03 למ׳)

מספר קורס: 88-112.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א׳ מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב׳ הוא רב־ברירתי (״אמריקאי״). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$
$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$
$$\det(A) = |A|$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$
אופרטור לינארי = העתקה לינארית
לכסינה = ניתנת לליכסון
$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$
אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב׳.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \ldots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן ללכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע״י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \ldots, v_n$. הוכח ש $C = A^t A$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
3. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
4. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.

שאלה 2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t = -A$, אזי בהכרח:

1. $I - A$ סימטרית.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\mathrm{tr}(A) = 0$.
4. $\det(A) = 0$.

שאלה 3. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
3. אם $A^2 = A$ אזי $\lambda = 1$.
4. אם A אוניטרית אזי $|\lambda| = 1$.

שאלה 4. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. 2 הוא ערך עצמי של A.
3. 1 הוא ערך עצמי של A.
4. A ניתנת לליכסון (מעל $\mathbb{R}$).

שאלה 5. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
3. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.
4. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.

שאלה 6. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם A סימטרית ו $A^2 = I$ אזי A אורתוגונלית.
4. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A = \pm I$.

שאלה 7. נתבונן במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = 0$, $\det(AB) = 1$.
2. $\det(A+B) = 1$, $\det(AB) = 0$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.

שאלה 8. יהי $B = \{v_1 = (1,1,i), v_2 = (i,i,0), v_3 = (1,0,0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\text{span}(u_1) = \text{span}(v_1)$ וכן $\text{span}(u_1, u_2) = \text{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)$.
4. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-2)$.

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1006
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב׳ ה׳תשס״ג (מועד ב׳)
יום שני, ד׳ באלול ה׳תשס״ג (1.9.03 למ׳)

מספר קורס: 88-112.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:

א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א׳ מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב׳ הוא רב־ברירתי (״אמריקאי״). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$\begin{aligned}
F^{n\times 1} &= F^n \\
F^{m\times n} &= M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) \\
\det(A) &= |A| \\
\mathrm{tr}(A) &= \mathrm{Tr}(A) \\
\text{אופרטור לינארי} &= \text{העתקה לינארית} \\
\text{לכסינה} &= \text{ניתנת לליכסון} \\
A^* &= A^H = \bar{A}^t \\
\text{אוניטרית} &= \text{יוניטרית}
\end{aligned}$$

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \dots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \dots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן לליכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \dots, v_n$. הוכח ש $C = A^t A$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \dots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t = -A$, אזי בהכרח:

1. $I - A$ סימטרית.
2. $\mathrm{tr}(A) = 0$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $\det(A) = 0$.

שאלה 2. יהיה $\mathbb{R}^{4\times 4} \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ אזי:

1. 2 הוא ערך עצמי של A.
2. A ניתנת לליכסון (מעל $\mathbb{R}$).
3. 1 הוא ערך עצמי של A.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 3. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם A אוניטרית אזי $|\lambda| = 1$.
4. אם $A^2 = A$ אזי $\lambda = 1$.

שאלה 4. נתבונן במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\det(A+B) = 1$, $\det(AB) = 0$.
4. $\det(A+B) = 0$, $\det(AB) = 1$.

שאלה 5. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A = \pm I$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם A סימטרית ו $A^2 = I$ אזי A אורתוגונלית.
4. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת לליכסון (מעל $\mathbb{R}$).

שאלה 6. יהי $B = \{v_1 = (1,1,i), v_2 = (i,i,0), v_3 = (1,0,0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\mathrm{span}(u_1) = \mathrm{span}(v_1)$ וכן $\mathrm{span}(u_1, u_2) = \mathrm{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$.
2. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-2)$.

שאלה 7. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
4. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.

שאלה 8. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.
2. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1007
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"ג **(מועד ב')**
יום שני, ד' באלול ה'תשס"ג (1.9.03 למי')

מספר קורס: 88-112.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$
$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$
$$\det(A) = |A|$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$

אופרטור לינארי = העתקה לינארית
לכסינה = ניתנת לליכסון

$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$

אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $0 < \langle Tv, v\rangle$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \dots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \dots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן לליכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \dots, v_n$. הוכח ש $C = A^tA$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \dots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות).
סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. נתבונן במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.

2. $\det(A+B)=0$, $\det(AB)=1$.

3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

4. $\det(A+B)=1$, $\det(AB)=0$.

שאלה 2. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A=\pm I$.

2. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).

3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

4. אם A סימטרית ו $A^2=I$ אזי A אורתוגונלית.

שאלה 3. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

2. A ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).

3. 1 הוא ערך עצמי של A.

4. 2 הוא ערך עצמי של A.

שאלה 4. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t=-A$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

2. $A-I$ סימטרית.

3. $\det(A)=0$.

4. $\operatorname{tr}(A)=0$.

שאלה 5. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם A אוניטרית אזי $|\lambda|=1$.

2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

3. אם $A^2=A$ אזי $\lambda=1$.

4. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).

שאלה 6. יהי $B = \{v_1 = (1,1,i), v_2 = (i,i,0), v_3 = (1,0,0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\operatorname{span}(u_1) = \operatorname{span}(v_1)$ וכן $\operatorname{span}(u_1, u_2) = \operatorname{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)$.
2. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-2)$.

שאלה 7. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, אזי בהכרח:

1. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
2. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
3. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 8. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.
3. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
4. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1008
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"ג (מועד ב')
יום שני, ד' באלול ה'תשס"ג (1.9.03 למי')

מספר קורס: 88-112.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$
$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$
$$\det(A) = |A|$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$

אופרטור לינארי = העתקה לינארית

לכסינה = ניתנת לליכסון

$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$

אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \ldots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן ללכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \ldots, v_n$. הוכח ש $C = A^tA$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
2. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.

שאלה 2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
2. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A = \pm I$.
3. אם A סימטרית ו $A^2 = I$ אזי A אורתוגונלית.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 3. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי:

1. 2 הוא ערך עצמי של A.
2. A ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. 1 הוא ערך עצמי של A.

שאלה 4. נתבונן במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.
2. $\det(A+B) = 1$, $\det(AB) = 0$.
3. $\det(A+B) = 0$, $\det(AB) = 1$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 5. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
2. אם $A^2 = A$ אזי $\lambda = 1$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. אם A אוניטרית אזי $|\lambda| = 1$.

שאלה 6. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
3. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
4. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.

שאלה 7. יהי $B = \{v_1 = (1,1,i), v_2 = (i,i,0), v_3 = (1,0,0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\mathrm{span}(u_1) = \mathrm{span}(v_1)$ וכן $\mathrm{span}(u_1, u_2) = \mathrm{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)$.
2. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-2)$.
3. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 8. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t = -A$, אזי בהכרח:

1. $\det(A) = 0$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $I - A$ סימטרית.
4. $\mathrm{tr}(A) = 0$.

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1009

מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"ג (**מועד ב'**)

יום שני, ד' באלול ה'תשס"ג (1.9.03 למ')

מספר קורס: 112-88.

מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.

חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.

הנחיות:

א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.

ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.

ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).

ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$\begin{aligned}
F^{n\times 1} &= F^n \\
F^{m\times n} &= M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) \\
\det(A) &= |A| \\
\mathrm{tr}(A) &= \mathrm{Tr}(A) \\
\text{אופרטור לינארי} &= \text{העתקה לינארית} \\
\text{לכסינה} &= \text{ניתנת לליכסון} \\
A^* &= A^H = \bar{A}^t \\
\text{אוניטרית} &= \text{יוניטרית}
\end{aligned}$$

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \ldots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן לליכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \ldots, v_n$. הוכח ש $C = A^t A$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \ldots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות).
סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהי $B = \{v_1 = (1, 1, i), v_2 = (i, i, 0), v_3 = (1, 0, 0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\operatorname{span}(u_1) = \operatorname{span}(v_1)$ וכן $\operatorname{span}(u_1, u_2) = \operatorname{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. $u_1 = (1, 1, i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 0)$.
2. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$.
3. $u_1 = (1, 1, i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, -2)$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t = -A$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. $\det(A) = 0$.
3. $I - A$ סימטרית.
4. $\operatorname{tr}(A) = 0$.

שאלה 3. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי:

1. 2 הוא ערך עצמי של A.
2. 1 הוא ערך עצמי של A.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. A ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).

שאלה 4. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם A סימטרית ו $A^2 = I$ אזי A אורתוגונלית.
3. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת ללכסון (מעל $\mathbb{R}$).
4. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A = \pm I$.

שאלה 5. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
2. אם $A^2 = A$ אזי $\lambda = 1$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. אם A אוניטרית אזי $|\lambda| = 1$.

שאלה 6. נתבונן במטריצות הבאות:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = 0$, $\det(AB) = 1$.
2. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.
3. $\det(A+B) = 1$, $\det(AB) = 0$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 7. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
2. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.
3. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 8. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
3. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.
4. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.

בהצלחה!

שאלון סגור

מספר סידורי: 1010
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב׳ ה׳תשס״ג **(מועד ב׳)**
יום שני, ד׳ באלול ה׳תשס״ג (1.9.03 למ׳)

מספר קורס: 88-112.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א׳ מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב׳ הוא רב־ברירתי (״אמריקאי״). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$
$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$
$$\det(A) = |A|$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$

אופרטור לינארי = העתקה לינארית

לכסינה = ניתנת לליכסון

$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$

אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על *שתי שאלות בדיוק* מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.

א. (5 נקודות) הגדר אופרטור (לינארי) הרמיטי (צמוד לעצמו) על V.

ג. (7 נקודות) הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי על V הם ממשיים.

ד. (7 נקודות) אופרטור לינארי הרמיטי על V נקרא *חיובי בהחלט* אם $\langle Tv, v\rangle > 0$ לכל $0 \neq v \in V$. (כלומר $\langle Tv, v\rangle$ הוא ממשי חיובי לכל $0 \neq v \in V$).
הוכח: כל הערכים העצמיים של אופרטור (לינארי הרמיטי) חיובי בהחלט T הם חיוביים.

ה. (7 נקודות) הוכח: אם כל הערכים העצמיים של אופרטור לינארי הרמיטי $T : V \to V$ הם חיוביים, אז T חיובי בהחלט.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי (של אופרטור לינארי).

ב. (9 נקודות) יהיו $v_1, \dots, v_k$ וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי T השייכים ל k ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\lambda_j \neq \lambda_i$ לכל $i \neq j$). הוכח ש $v_1, \dots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

ג. (9 נקודות) יהי T אופרטור לינארי במרחב n מימדי עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש T ניתן ללכסון.

שאלה 3.

א. (5 נקודות) הגדר בסיס אורתונורמלי (של מרחב מכפלה פנימית V).

ב. (7 נקודות) יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ לכל i, j, כאשר $\langle , \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$. תהא A המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \dots, v_n$. הוכח ש $C = A^tA$.

ג. (7 נקודות) הוכח: $\det(C) \neq 0$ אם ורק אם $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויים לינארית.

ד. (7 נקודות) הוכח: $AA^t = I$ אם ורק אם $v_1, \dots, v_n$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^t = -A$, אזי בהכרח:

1. $I - A$ סימטרית.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\det(A) = 0$.
4. $\mathrm{tr}(A) = 0$.

שאלה 2. יהיה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ אזי:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. A ניתנת לליכסון (מעל $\mathbb{R}$).
3. 1 הוא ערך עצמי של A.
4. 2 הוא ערך עצמי של A.

שאלה 3. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי בהכרח:

1. אם A סימטרית ואורתוגונלית אזי $A = \pm I$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם A סימטרית ו $A^2 = I$ אזי A אורתוגונלית.
4. אם A אורתוגונלית אזי היא ניתנת לליכסון (מעל $\mathbb{R}$).

שאלה 4. נתבונן במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

אזי:

1. $\det(A+B) = 0$, $\det(AB) = 1$.
2. $\det(A+B) = -1$, $\det(AB) = 1$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $\det(A+B) = 1$, $\det(AB) = 0$.

שאלה 5. יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם λ הוא ממשי אזי A היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
2. אם A אוניטרית אזי $|\lambda| = 1$.
3. אם $A^2 = A$ אזי $\lambda = 1$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 6. יהי $B = \{v_1 = (1,1,i), v_2 = (i,i,0), v_3 = (1,0,0)\}$ בסיס של $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^3$, כך שמתקיים $\mathrm{span}(u_1) = \mathrm{span}(v_1)$ וכן $\mathrm{span}(u_1, u_2) = \mathrm{span}(v_1, v_2)$. אזי u_1 ו u_2 יכולים להיות:

1. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)$.
2. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $u_1 = (1,1,i)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-2)$.

שאלה 7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי בהכרח:

1. אם $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי שונה מאפס אזי $\{v \in V : \varphi(v) = 1\}$ הנו תת־מרחב ב־V.
2. כל שני פונקציונלים לינאריים עם אותו גרעין הם תלויים לינארית.
3. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (שדה המספרים המרוכבים), אזי קיים פונקציונל לינארי $\varphi : V \to \mathbb{C}$ כך ש $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים).
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 8. תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אזי בהכרח:

1. אם $\det(AB) > 0$ אזי $\det(A^2B) > 0$.
2. אם $\det(AB) = \det(A^2B)$ אזי $\det(A) = 1$.
3. אם $\det(AB) \neq 0$ אזי A וגם B, שתיהן הפיכות.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

בהצלחה!

Answers for exam number 1001

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	2	4	2	4	4	2	3	3

Answers for exam number 1002

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	4	3	4	1	1	1	3	4

Answers for exam number 1003

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	4	4	3	3	4	2	4	4

Answers for exam number 1004

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	1	3	2	3	3	3	1	3

Answers for exam number 1005

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	2	3	4	3	4	3	3	2

Answers for exam number 1006

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	2	3	3	2	3	3	1	1

Answers for exam number 1007

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	3	4	3	4	1	3	2	2

Answers for exam number 1008

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	4	3	4	4	4	3	4	4

Answers for exam number 1009

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	4	4	2	2	4	4	3	3

Answers for exam number 1010

Question number	1	2	3	4	5	6	7	8
Correct answer	4	3	3	3	2	3	2	3