שאלון סגור

מספר סידורי: 1001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב׳ ה׳תשס״ב (מועד ב׳)
כ״א אלול תשס״ב (29.8.01 למ׳)

מספר קורס: 88-113-16.
מרצה: בועז צבאן.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, **גם לא במחשבון**.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת (המופיע על המדבקה) בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א׳ מכיל שתי שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב׳ הוא רב־ברירתי (״אמריקאי״). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי.

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$
$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$
$$\det(A) = |A|$$
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$

אופרטור לינארי = העתקה לינארית

לכסינה = ניתנת לליכסון

$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$

אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (40 נקודות)

ענה על שתי השאלות הבאות. את התשובה/הוכחה עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב׳.

שאלה 1. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. יהיו W_1, W_2 תת־מרחבים של V כך ש $V = W_1 \oplus W_2$ (V הוא סכום ישר של W_1 ו W_2). נגדיר $T : V \to V$ באופן הבא:

$$T(w_1 + w_2) := w_1$$

לכל $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. אזי

א. (5 נקודות) הראה ש T העתקה לינארית.

ב. (5 נקודות) מצא את הגרעין ואת התמונה של T.

ג. (5 נקודות) מצא את הערכים העצמיים ואת המרחבים העצמיים של T.

ד. (5 נקודות) הוכח ש T ניתנת ללכסון.

שאלה 2. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית (כלומר $A^* = A$).

א. (8 נקודות) הוכח שכל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.

ב. (8 נקודות) הוכח שאם $v, w \in \mathbb{C}^n$ הם וקטורים עצמיים של A המתאימים לערכים עצמיים שונים, אזי $\langle v, w\rangle = 0$ (המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{C}^n$).

ג. (4 נקודות) תן דוגמה למטריצה הרמיטית שלא כל רכיביה ממשיים.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (63 נקודות: 7 נקודות לכל שאלה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהיו W, V מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F, ויהיו $T : V \to W$ ו $S : W \to V$ העתקות לינאריות, כך ש $ST : V \to V$ היא על. אזי בהכרח:

1. T ו S שתיהן חד־חד ערכיות.
2. T היא על ו S היא חד־חד ערכית.
3. T ו S שתיהן על.
4. T היא חד־חד ערכית ו S היא על.

שאלה 2. תהי $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה הוא $(t-1)^4(t-2)^4$, והפולינום המינימלי שלה הוא $(t-1)^2(t-2)$. נתון שהריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 1 של A הוא 2. אזי צורת ג׳ורדן של A היא:

1. $(1) \oplus (1) \oplus (1) \oplus (1) \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus (2) \oplus (2)$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus (2) \oplus (2)$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (2) \oplus (2) \oplus (2) \oplus (2)$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (1) \oplus (1) \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

שאלה 3. יהי V מרחב וקטורי כך ש $\dim V = n > 1$, ויהי B בסיס עבור V. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ותהי A המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס B, $A = [T]_B^B$. נניח שמתקיים $A^n = O$. אזי *בהכרח*:

1. $T = O$ (העתקת האפס).
2. לכל $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\ker(T^{i+1}) \neq \ker(T^i)$.
3. אם $T \neq O$ אז $\ker(T^2) \neq \ker(T)$.
4. קיים $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ כך ש $\ker(T^{i+1}) \not\supseteq \ker(T^i)$.

שאלה 4. יהי $a \in \mathbb{R}$. נתבונן במטריצה $B = \begin{pmatrix} 6 & 4a \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$. אזי:

1. קיים a כך ש B לא ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{C}$, וגם קיים a כך ש B ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{C}$.
2. המטריצה B ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$ לכל a.
3. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.
4. המטריצה B לא ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{C}$ לשום ערך של a.

שאלה 5. יהיו

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי:

1. $\det(A+B) = 0$, $\operatorname{tr}(A+B) = 0$.
2. $\det(A+B) > 0$, $\det(AB) \geq 0$.
3. $\det(A+B) < 0$, $\det(AB) \leq 0$.
4. $\det(A+B) = 0$, $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

שאלה 6. נתון בסיס עבור $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,2), v_3 = (3,0,1)\}.$$

בסיס אורתונורמלי $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ עבור $\mathbb{R}^3$ המקיים גם $\operatorname{span}\{v_1', v_2'\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ הוא:

1. $B' = \{v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), v_2' = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,4), v_3' = \frac{1}{3}(2,-2,1)\}$.
2. $B' = \{v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), v_2' = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,4), v_3' = \frac{1}{3}(2,-2,2)\}$.
3. $B' = \{v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), v_2' = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,4), v_3' = \frac{1}{3}(2,-2,-1)\}$.
4. $B' = \{v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), v_2' = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,4), v_3' = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,-2,-1)\}$.

שאלה 7. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

מספר הערכים העצמיים השונים של A הוא:

1. 5.
2. 1.
3. 2.
4. 3.

שאלה 8. יהא V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. יהא $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אזי בהכרח:

1. לכל בסיס B של V מתקיים $[T^*]_B = ([T]_B)^*$ (כאשר עבור מטריצה A, $A^* = \bar{A}^t$).
2. אם T אוניטרי, אז לכל בסיס אורתונורמלי $\{u_1, \ldots, u_n\}$ של V, מתקיים ש $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ בסיס אורתונרמלי של V.
3. אם T אוניטרי, אז לכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$.
4. אם T אוניטרי, אז כל הערכים העצמיים של T הם ממשיים.

שאלה 9. יהי H מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. יהיו $u, v \in H$ אזי

1. אם $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ אז u אורתוגונלי ל v.
2. אם $\langle u, v\rangle^2 = 1$ אז $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
3. אם $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ אז u אורתוגונלי ל v.
4. אם $\langle u, v\rangle^2 = -1$ אז $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

בהצלחה!