

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"א (א' 38)
כ"ד אלול תשס"א (12.9.01)

מספר קורס: 88-113-01/04/07/14/19.

מרצים: צבי ארד, מיכאל כץ, רון עדין, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן וסטיב שניידר.
מתרגלים: אושרית אברוצקי, חגי אהרנוביץ, ודים אוסטפנקו, ניר אלקיים, הראל בדיחי, לודה מרקוס ושולמית רכס.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.
הנחיות:

א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלה פתוחה, עליה יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב-ברירתי (אמריקאי). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (הכחנה מאוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעה וחצי.

הגדרות

הסימונים הבאים (בקוצות הרצאה שוח) שקולים זה לזה:

$$\begin{aligned} F^{n \times 1} &= F^n \\ F^{m \times n} &= F_{m \times n} = M_{m \times n}(F) \\ \det(A) &= |A| \\ \text{ניתנת לליכסון} &= \text{לכסינה} \end{aligned}$$

חלק א: שאלות פתוחות (40 נקודות)

ענה על השאלות הבאות. את התשובה/הוכחה עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדרך נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F , ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית. יהיו $U \subseteq V$ תת-מרחב, ו $\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס עבור U . נסמן

$$T[U] = \{T(u) : u \in U\}$$

(החמונה של U יד T).א. (5 נקודות) הוכח ש $T[U]$ תת-מרחב של W .

ב. (15 נקודות) הוכח:

$$\ker(T) \cap U = \{0\} \text{ אם ורק אם } \{T(u_1), \dots, T(u_k)\} \text{ בסיס עבור } T[U]$$

שאלה 2.

- א. (5 נקודות) הגדר : פולינום אופייני, ערך עצמי, וקטור עצמי.
 ב. (10 נקודות) הוכח, ישירות מההגדרות : סקלר הוא שורש של הפולינום האופייני אם ורק אם הוא ערך עצמי.
 ג. (5 נקודות) תן דוגמא למטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} a & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $a, b \neq 0$, כך שהפולינום האופייני שלה הוא $f(x) = x^2$. בדוק את תשובתך.

חלק ב: שאלות רב-ברירתיות (64 נקודות: 8 נקודות כל אחת)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. אם v, w ניצבים במרחב מכפלה פנימית, אזי :

1. $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$

2. $\|v + 2w\| = \|2v + w\|$

3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

4. $\|v + w\| = \|v - w\|$

שאלה 2. תהייה $S, T : V \rightarrow W$ העתקות לינאריות, ותהי $L = S + T$. אזי בהכרח :

1. $\ker(L) = \ker(S) \cap \ker(T)$

2. $\operatorname{im}(L) = \operatorname{im}(S) + \operatorname{im}(T)$

3. $\ker(L) = \ker(S) + \ker(T)$

4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה בהכרח נכונה.

שאלה 3. יהא V מרחב וקטורי, ותהא $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2 = T$. אזי :

1. אם c הוא ערך עצמי של T , אז $c = 0$ או $c = 1$.

2. $\ker(T) = \operatorname{im}(T)$

3. $T = I$ או $T = O$

4. אם $T \neq O$ אז T הפיכה.

שאלה 4. תהא $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ההעתקה הלינארית המוגדרת על ידי

$$T(x, y, z) = (2x - 3y + 4z, 4x + 5y - 2z)$$

לכל $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. יהיו

$$B = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$C = \{w_1 = (1, 1), w_2 = (1, -1)\}$$

בסיסים עבור $\mathbb{R}^3$ ו $\mathbb{R}^2$ בהתאמה. תהא A המטריצה המייצגת את T לפי הבסיסים B ו C . אזי:

$$1. \text{ לכל } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ מתקיים } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ -x - 4y + 3z \end{pmatrix}$$

2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

$$3. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ לכל } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ מתקיים } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z \\ 4x + 5y - 2z \end{pmatrix}$$

שאלה 5. יהא $n > 2$ איזוגי, ותהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש $\det(A) = \det(\text{adj}(A))$. אזי בהכרח:

$$1. A = \text{adj}(A)$$

2. A אינה הפיכה.

$$3. \det(A) \in \{0, 1\}$$

4. A הפיכה.

$$\text{שאלה 6. תהא } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}. \text{ אזי:}$$

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

$$2. \text{ המטריצה } A \text{ דומה למטריצה } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ המטריצה } A \text{ דומה למטריצה } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. המטריצה A אינה לכסינה ב $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

שאלה 7. תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה הפיכה המקיימת $\det(A^{-4}) = 1$. אזי בהכרח:

1. $\det(A) = 1$

2. $\det(A) \in \{1, -1\}$

3. $\det(A) \in \{1/4, -1/4, i/4, -i/4\}$

4. $\det(A) \in \{1, -1, i, -i\}$

שאלה 8. יהיו v, w וקטורים במרחב מכפלה פנימית המקיימים:

$$\langle v, w \rangle = 2$$

$$\langle v, v \rangle = 2$$

$$\langle w, w \rangle = 1$$

אזי:

1. v, w תלויים לינארית.

2. מצב זה הוא בלתי אפשרי.

3. הזווית בין v ל w היא $\pi/4$ ($= 45^\circ$).

4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.