

אלגברה לינארית 2 (88-113-04)**בחינת סיום (מועד ב')**

מרצה: ד"ר רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 אסור להשתמש בכל חומר עזר, פרט למחשב-כיס פשוט.
 נא לרשום כאן את מספר מחברת הבחינה:

בבחינה זו 17 סעיפים (= "טוב" בגימטריה).
 כל סעיף של שאלה מס' 1 מזכה ב- 7 נקודות (2 סעיפים).
 כל סעיף של יתר השאלות מזכה ב- 6 נקודות (15 סעיפים).
 את שאלה מס' 1 יש לפתור באופן מפורט במחברת הבחינה.
 על יתר השאלות יש לענות במקומות המסומנים בשאלון עצמו; ניתן להשתמש במחברת כטייטה לחישובים (אך לא בעמודים שבהם נכתב פתרון שאלה מס' 1).
 בסיום הבחינה -- נא למסור את השאלון ואת מחברת הבחינה.

מהצחה!

1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbf{F} , ויהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי המקיים: $T^4 = T$.
 I. הוכח: $V = \text{im}(T^3) + \ker(T)$.
 II. האם הסכום בסעיף א' הוא ישר? נמק היטב.

2. נתון שלאופרטור לינארי $T: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ יש פולינום מינימלי $m_T(x) = x^3 - x^2$. אזי:

- I. הערכים העצמיים של T הם: _____.
 II. T ניתן לליכסון: כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).
 III. T ניתן למישלוש: כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).
 IV. T אופרטור הרמיטי (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית):
 כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).

3. יהי $W = \text{span} \{ (1,1,0,0), (0,1,1,1) \}$ תת-מרחב של $V = \mathbf{R}^4$. מצא בסיס אורתונורמלי $\{ \bar{e}_1, \bar{e}_2 \}$ עבור W (ביחס למכפלה הפנימית הרגילה של \mathbf{R}^4):

I. $\bar{e}_1 =$ _____

II. $\bar{e}_2 =$ _____

4. תהי $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית שהצגתה בבסיסים הסטנדרטיים של \mathbb{R}^4 , \mathbb{R}^2 היא על-ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

ותהי T^* ההעתקה הצמודה (ביחס למכפלות הפנימיות הסטנדרטיות). אזי:

I. $\dim(\ker T^*) = \underline{\hspace{2cm}}$

II. האם יש בסיסים של \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^4 שבהם הצגת T הנ"ל היא על-ידי המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

תשובה: כן \ לא (סמן בעיגול).

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} , ויהיו $\vec{v}, \vec{w} \in V$. אזי:

I. $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$ (סמן בעיגול).

II. $\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \{\vec{v}\}^\perp = \{\vec{w}\}^\perp$ (סמן בעיגול).

6. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$. נסמן

$$d = \begin{vmatrix} a & -b & a-b \\ -b & a-b & a \\ a-b & a & -b \end{vmatrix}$$

אזי: (סמן בעיגול את התשובה הנכונה)

$$\| d = 2(a-b)^3 \quad \| \quad d = 2(b^3 - a^3) \quad \| \quad d = 2(a^3 - b^3)$$

7. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & i & 2i \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

אזי:

I. $\det(A) = \underline{\hspace{2cm}}$

II. $\det(\text{adj } A) = \underline{\hspace{2cm}}$

8. יהי T אופרטור לינארי עם פולינום אופייני $f_T(x) = x^4(x+1)^4(x-2)$.

I. מספר צורות ג'ורדן האפשריות עבור T הוא: $\underline{\hspace{2cm}}$

II. אם ידוע גם שהפולינום המינימלי של T הוא $m_T(x) = x^2(x+1)^2(x-2)$, אז מספר

צורות ג'ורדן האפשריות עבור T הוא: $\underline{\hspace{2cm}}$