

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"ג (מועד א')

יום שלישי, י"ז סיון ה'תשס"ג (17.6.03 למ')

מספר קורס: 88-112.

מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.

חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

הנחיות:

- יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
 - המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב-ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
 - יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
 - שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
- משך הבחינה:** שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$\begin{aligned}
 F^{n \times 1} &= F^n \\
 F^{m \times n} &= M_{m \times n}(F) = M_{m,n}(F) = \text{Mat}_{m \times n}(F) \\
 \det(A) &= |A| \\
 \text{tr}(A) &= \text{Tr}(A) \\
 \text{העתקה לינארית} &= \text{אופרטור לינארי} \\
 \text{ניתנת לליכסון} &= \text{לכסינה} \\
 A^* &= A^H = \bar{A}^t \\
 \text{יוניטרית} &= \text{אוניטרית}
 \end{aligned}$$

חלק א: שאלות פתוחות (52 נקודות: 26 נקודות לכל תשובה מלאה)

ענה על שתי שאלות בדיוק מתוך שלוש השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטייטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי, ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

א. (5 נקודות) הגדר את ההעתקה הצמודה T^* .

ב. (7 נקודות) הוכח כי $TT^* = T^*T = Id$ אם ורק אם $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ לכל $v, w \in V$.
(Id מסמן את העתקת הזהות על V .)

ג. (7 נקודות) הראה שאם $v \neq 0$ מקיים $Tv = \lambda v$ וגם $T^*v = \mu v$ אז $\lambda = \bar{\mu}$.

ד. (7 נקודות) הראה שאם $T^*T = Id$ אז כל ערך עצמי λ של T מקיים $|\lambda| = 1$.

שאלה 2.

א. (8 נקודות) עבור מרחב וקטורי V , הגדר: פונקציונל לינארי על V ; המרחב הדואלי V^* .

ב. (9 נקודות) יהי V מרחב וקטורי מממד סופי, יהי $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq 0$, ויהי W תת-מרחב של V המכיל את $\ker \varphi$. הוכח כי $W = V$ או $W = \ker \varphi$.

ג. (9 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי, ויהי $\varphi \in V^*$. הוכח כי קיים וקטור $w \in V$ כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$.

שאלה 3.

א. (10 נקודות) מטריצה ריבועית A נקראת נילפוטנטית אם קיים k חיובי כך ש $A^k = 0$. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נילפוטנטית. הוכח ש 0 הוא ערך עצמי של A , ול A אין ערכים עצמיים נוספים פרט ל 0 .

ב. (6 נקודות) הוכח שמטריצה משולשת עם אפסים על האלכסון היא נילפוטנטית.

ג. (10 נקודות) הוכח שאם ל $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ יש רק הערך העצמי 0 אזי היא נילפוטנטית.

חלק ב: שאלות רב-ברירתיות (48 נקודות: 6 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות).
סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. תהי $A = \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, אזי:

1. $\det(\operatorname{adj} A) = -2 \det A$.

2. $\det(\operatorname{adj} A) = \det A$.

3. $\det(\operatorname{adj} A) = 2 \det A$.

4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 2. יהי $\mathbb{F}$ שדה, ויהיו $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, ו $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. אזי בהכרח:

1. אם B דומה ל A אז $f(B)$ דומה ל $f(A)$.

2. $\det(f(A)) = f(\det(A))$.

3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

4. אם $f(A) = f(B)$ אז $f(A - B) = 0$.

שאלה 3. יהיו T_1, T_2 שני אופרטורים לינאריים הרמיטיים (צמודים לעצמם) על אותו מרחב מכפלה פנימית (ממימד סופי) מעל $\mathbb{C}$. אזי בהכרח:

1. $T_1 T_2 + T_2 T_1$ וגם $i(T_1 T_2 - T_2 T_1)$ הם הרמיטיים.

2. $T_1 T_2^2$ וגם $T_1 T_2 T_1^2$ הם הרמיטיים.

3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

4. $T_1 + T_2$ וגם $T_1 T_2$ הם הרמיטיים.

שאלה 4. לכל שני וקטורים $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ הגדר:

$$\langle x, y \rangle_A := x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2,$$

$$\langle x, y \rangle_B := x_1 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

אזי:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ וגם $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ שתיהן אינן מכפלות פנימיות.

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ וגם $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ שתיהן מכפלות פנימיות.

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ מכפלה פנימית אך $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ אינה מכפלה פנימית.

4. $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ מכפלה פנימית אך $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ אינה מכפלה פנימית.

שאלה 5. יהי $B = \{v_1 = (1, 2), v_2 = (3, 4)\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$, ויהי $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ הבסיס הדואלי של $(\mathbb{R}^2)^*$, אזי:

1. $\varphi(x, y) = -3x + 2y$.

2. $\varphi(x, y) = -x + y$.

3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

4. $\varphi(x, y) = 4x - 3y$.

שאלה 6. יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. אזי $\det(A^{123}B^4)$ שווה ל:

1. 2^{123} .

2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

3. -2^{127} .

4. -2^4 .

שאלה 7. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי. אזי בהכרח:

1. אם T חד-חד-ערכי אז ל T יש ערך עצמי.

2. אם T איננו חד-חד-ערכי אז ל T יש ערך עצמי.

3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

4. אם $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T אז הוא גם ערך עצמי של T^2 .

שאלה 8. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ותהי $B = I + A + A^2$, אזי בהכרח:

1. אם A אורתוגונלית אז גם B אורתוגונלית.

2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

3. אם A ניתנת לליכסון אז גם B ניתנת לליכסון.

4. אם A הפיכה אז גם B הפיכה.

בהצלחה!