שאלון סגור

מספר סידורי: 1001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב' ה'תשס"ב (מועד א')

כ"ג תמוז תשס"ב (3.7.02 למ')

מספר קורס: 88-113-16.

מרצה: בועז צבאן.

חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, **גם לא במחשבון**.

הנחיות:

א. יש לציין את מספר המחברת (המופיע על המדבקה) **בראש עמוד זה.**

ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שתי שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.

ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).

ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$F^{n\times 1} = F^n$$

$$F^{m\times n} = M_{m\times n}(F) = M_{m,n}(F) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$$

$$\det(A) = |A|$$

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$$

אופרטור לינארי = העתקה לינארית

לכסינה = ניתנת לליכסון

$$A^* = A^H = \bar{A}^t$$

אוניטרית = יוניטרית

חלק א: שאלות פתוחות (40 נקודות)

ענה על שתי השאלות הבאות. את התשובה/הוכחה עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב׳.

שאלה 1. א. (5 נקודות) הגדר מרחב מכפלה פנימית, מעל $\mathbb{C}$ ומעל $\mathbb{R}$.

ב. (10 נקודות) הוכח את אי שוויון *קושי־שוורץ* : יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, אזי לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

ג. (5 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $v, w \in V$ וקטורים המקיימים:

$$|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \neq 0.$$

חשב את $\dim(\operatorname{span}\{v, w\})$ (נמק את תשובתך).

שאלה 2.

א. (5 נקודות) תהי $A \in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הגדר: ערך עצמי, וקטור עצמי של A.

ב. (10 נקודות) תהי $A \in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ k ערכים עצמיים שונים של A. יהיו $v_1, \ldots, v_k \in F^n$ וקטורים עצמיים מתאימים (כלומר לכל $1 \leq i \leq k$, v_i הוא וקטור עצמי השייך לערך העצמי λ_i). הוכח כי $v_1, \ldots, v_k$ הם בלתי תלויים לינארית.

ג. (5 נקודות) תן דוגמא למטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *שאינה* לכסינה. הוכח שהיא אכן אינה לכסינה. (שים לב שיש לתת דוגמא כללית שתתאים לכל $n > 1$.)

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (63 נקודות: 7 נקודות לכל שאלה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. תהי $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, ותהי $\operatorname{adj}(C)$ המטריצה הצמודה הקלאסית של C. אזי:

1. המספר $i\det(C)$ הוא ממשי חיובי, וגם המספר $\det(\operatorname{adj}(C))$ הוא ממשי חיובי.
2. המספר $\det(C)$ הוא מדומה טהור, והמספר $i\det(\operatorname{adj}(C))$ הוא ממשי חיובי.
3. המספר $i\det(C)$ הוא ממשי חיובי, והמספר $\det(\operatorname{adj}(C))$ הוא ממשי שלילי.
4. המספר $\det(C)$ הוא מדומה טהור, וגם $\det(\operatorname{adj}(C))$ הוא מדומה טהור.

שאלה 2. יהי V מרחב וקטורי ממימד 12, ויהי W תת־מרחב ממימד 7 של V. יהי U מרחב וקטורי ממימד 6, ותהי $T : V \to U$ העתקה לינארית. נגדיר תת־מרחב $T(W) \subseteq U$:

$$T(W) = \{T(w) : w \in W\}$$

אזי $\dim(\ker(T) \cap W) + \dim(T(W))$ שווה ל:

1. 5.
2. 12.
3. 7.
4. 6.

שאלה 3. יהי $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ מרחב המטריצות 2×2 מעל $\mathbb{R}$. תהי $T : V \to V$ ההעתקה הלינארית המוגדרת על ידי

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A$$

לכל $A \in V$. אזי המימד של $\mathrm{im}(T)$ הוא:

1. 1.
2. 4.
3. 2.
4. 3.

שאלה 4. יהי $B = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,2,2), v_3 = (-1,-1,1)\}$ בסיס עבור $\mathbb{R}^3$. הבסיס הדואלי עבור המרחב הדואלי של $\mathbb{R}^3$ הוא:

1. $B^* = \{\phi_1 = -2x + 5y - 4z, \phi_2 = -y + 2z, \phi_3 = 2x - y\}$
2. $B^* = \{\phi_1 = x + 2y + z, \phi_2 = x + 2y + 2z, \phi_3 = -x - y + z\}$
3. $B^* = \{\phi_1 = -4x + 3y - z, \phi_2 = 3x - 2y + z, \phi_3 = -2x + y\}$
4. $B^* = \{\phi_1 = \frac{-2x+5y-4z}{4}, \phi_2 = \frac{-y+2z}{2}, \phi_3 = \frac{2x-y}{4}\}$

שאלה 5. יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית, ויהיו $v_1, v_2 \in V$ כך ש $\|v_2\| \geq \|v_1\|$. אזי:

1. לכל $v \in V$, אם $\|v\| > \|v_1\|$, אז $\langle v, v_2 \rangle = 0$.
2. $\|v_1\| \leq \frac{|\langle v_2, v\rangle|}{\|v\|}$ לכל $0 \neq v \in V$.
3. $|\langle v_2, v\rangle| \geq |\langle v_1, v\rangle|$ לכל $v \in V$.
4. אם קיים $0 \neq v \in V$ כך ש- $|\langle v_2, v\rangle| = |\langle v_1, v\rangle|$ אז $\|v_1\| = \|v_2\|$.

שאלה 6. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

צורת ג'ורדן של המטריצה A היא:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

שאלה 7. יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך שהמטריצה A^t הפיכה, ותהי $C = (AB(A^t)^{-1})^t$. אזי בהכרח:

1. $\det(C) = \det(A)^2 \det(B)$.
2. $\det(C) = \det(B)$.
3. $\det(C) = \det(AA^t)$.
4. $\det(C) = \det(B)^{-1}$.

שאלה 8. יהי F שדה, ויהיו $A, B \in F^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם יש ל A ול B אותם ערכים עצמיים אז קיימת $P \in F^{n\times n}$ הפיכה המקיימת $B = P^{-1}AP$.
2. אם יש ל A ול B אותו פולינום אופייני אז קיימת $P \in F^{n\times n}$ הפיכה המקיימת $B = P^{-1}AP$.
3. כל התשובות האחרות אינן נכונות.
4. אם קיימת $P \in F^{n\times n}$ הפיכה המקיימת $B = P^{-1}AP$ אז יש ל A ול B אותם וקטורים עצמיים.

שאלה 9. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. כל התשובות האחרות אינן נכונות.
2. יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי עבור $\mathbb{C}^n$ (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית). אם A היא אוניטרית, אז $\langle Av_i, Av_j\rangle = 0$ לכל $i \neq j$.
3. אם $A^2 = I$ אז A היא אוניטרית.
4. אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ כך ש- $\|v\| = \|Av\|$ אז A היא אוניטרית.

בהצלחה!