שאלון סגור

מספר סידורי: 1001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 2

סמסטר ב׳ ה׳תשס״א (מועד א׳)
ה׳ תמוז תשס״א (26.6.01 לס״נ)

מספר קורס: 88-113-01/04/07/14/19.
מרצים: צבי ארד, מיכאל כץ, רון עדין, שלום פייגלשטוק וסטיב שניידר.
מתרגלים: אושרית אברוצקי, חגי אהרונוביץ, ודים אוסטפנקו, ניר אלקיים, הראל בדיחי, לודה מרקוס ושולמית רכס.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, *גם לא במחשבון*.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א׳ מכיל שאלה פתוחה, עליה יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב׳ הוא רב־ברירתי (״אמריקאי״). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי.

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$\begin{aligned} F^{n\times 1} &= F^n \\ F^{m\times n} &= F_{m\times n} = M_{m\times n}(F) \\ \det(A) &= |A| \\ \text{לכסינה} &= \text{ניתנת לליכסון} \end{aligned}$$

חלק א: שאלות פתוחות (40 נקודות)

ענה על השאלות הבאות. את התשובה/הוכחה עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב׳.

שאלה 1. יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F, ויהא $W \subseteq V$ תת־מרחב.
א. (10 נקודות) הוכח שקיימת העתקה לינארית $T : V \to V$ כך ש $\ker(T) = W$.
ב. (10 נקודות) נתון, בנוסף, ש $\dim(V) = 2\dim(W)$. הוכח שקיימת העתקה לינארית $T : V \to V$ כך ש $\ker(T) = \operatorname{im}(T) = W$.

שאלה 2.

א. (5 נקודות) הגדר: מטריצה לכסינה (ניתנת ללכסון).

ב. (10 נקודות) הוכח שמטריצה משולשית שאברי האלכסון שלה שונים זה מזה היא לכסינה.

ג. (5 נקודות) תן דוגמא למטריצה משולשית *שאינה* לכסינה. הוכח שהיא אכן אינה לכסינה.

חלק ב: שאלות רב–ברירתיות (64 נקודות: 8 נקודות לכל שאלה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהא $v = (1, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$. נתון בסיס

$$B = \{v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 1, 1)\}$$

עבור המרחב $\{v\}^\perp$ (המרחב הניצב לקבוצה $\{v\}$). סמן את הקבוצה $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ המהווה בסיס אורתונורמלי עבור $\{v\}^\perp$, כך שמתקיים $\mathrm{span}(\tilde{v}_1) = \mathrm{span}(v_1)$.

1. $\{\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1)\}$.
2. $\{\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)\}$.
3. $\{\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$.
4. $\{\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)\}$.

שאלה 2. תהא $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המקיימת $T(1, 2, 3) = -T(3, 2, 1)$. אזי בהכרח:

1. לכל $x, y, z \in \mathbb{R}$ מתקיים $T(x, y, z) = -T(z, y, x)$.
2. $(1, 1, 1) \in \ker(T)$.
3. $\dim(\ker(T)) \geq 2$.
4. T אינה על.

שאלה 3. תהא $A = \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. אזי בהכרח:

1. $\det(\mathrm{adj}(A)) = -2\det(A)$.
2. $\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)$.
3. $\det(\mathrm{adj}(A)) = 2\det(A)$.
4. $\det(\mathrm{adj}(A)) = -\det(A)$.

שאלה 4. תהא $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. אזי:

1. המטריצה A דומה למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
2. A אינה לכסינה.
3. הערכים העצמיים של A הם $1, 2, -2$, ולכן A לכסינה.
4. הערכים העצמיים של A הם 2 ו -2, והוקטור $(1, 2, -2)$ הוא וקטור עצמי של A.

שאלה 5. יהא V מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה F. תהא $\varphi : V \to F$ העתקה לינארית ($F = F^1$ כמרחב וקטורי מעל עצמו). אזי:

1. ייתכן ש $n > 1$ ו φ חד־חד ערכית.
2. לא קיים בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ ל V כך שלכל $i = 1, \dots, n$ מתקיים $\varphi(v_i) = 1$.
3. גם כאשר φ אינה העתקת האפס ($\varphi \not\equiv 0$) ייתכן ש φ אינה על.
4. בהכרח $\dim(\ker(\varphi)) \geq n - 1$.

שאלה 6. יהא F שדה, ותהא $A \in F^{n\times n}$. אזי:

1. אם $A^2 - 3I = I$ אז $A = 2I$ או $A = -2I$.
2. ייתכן ש A דומה למטריצה B, ובכל זאת המטריצה $A^2 - 3I$ אינה דומה למטריצה $B^2 - 3I$.
3. אם $A^2 - 3I = O$, ו λ ערך עצמי של A, אז $\lambda^2 - 3 = 0$.
4. $\det(A^2 - 3I) = \det(A)^2 - 3$.

שאלה 7. תהא

$$S = \{T \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) : T(1, 2, 3) = (0, 0)\}.$$

אזי:

1. $\dim(S) = 2$.
2. $\dim(S) = 4$.
3. $\dim(S) = 5$.
4. $\dim(S) = 3$.

שאלה 8. יהא V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v, w \in V$ וקטורים המקיימים $\|v\| = \|w\| = 1$. סמן את הטענה הנכונה.

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. אם v מאונך ל w אז $\|v + w\| = \sqrt{2}$.
3. אם v מאונך ל w אז $\|v + w\| = 2$.
4. אם $\|v + w\| = 2$, אז v מאונך ל w.

בהצלחה!