אלגברה לינארית 2 (88-113-01/04/07)
בחינת סיום (מועד א')

מרצים: פרופ' צ. ארד, ד"ר ר. עדין, פרופ' ש. פייגלשטוק

משך הבחינה: שעתיים (120 דקות).
אסור להשתמש בכל חומר עזר, פרט למחשב-כיס פשוט.
שימו לב: לאחת השאלות יש גירסא המיועדת לתלמידי פרופ' פייגלשטוק בלבד, וגירסא אחרת המיועדת לתלמידי פרופ' ארד וד"ר עדין בלבד.
בשאלה מס' 1 יש לרשום הוכחה מפורטת ומדויקת במחברת הבחינה. על יתר השאלות יש לענות ע"י סימון התשובה הנכונה בשאלון עצמו; ניתן להשתמש לטיוטה במחברת הבחינה (אך לא בעמודים שבהם נפתרה שאלה מס' 1).
תשובה מלאה על שאלה מס' 1 מזכה ב-20 נקודות. תשובה נכונה על כל שאלה אחרת מזכה ב-8 נקודות.
בסיום הבחינה - נא למסור את השאלון ואת מחברת הבחינה.

בהצלחה!

הערה: הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$\text{span} = \text{Sp}$

$\mathbf{F}^{n\times n} = \mathbf{F}_{n,n} = M_n(\mathbf{F})$

T הרמיטית $\equiv$ T צמודה לעצמה $\equiv$ $(T^* = T)$

1. יהיו V, W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה $\mathbf{F}$, ותהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. הוכח:

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = \dim V$$

2. יהי $V := \mathbf{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 לכל היותר, עם מקדמים ממשיים. כידוע, V הוא מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbf{R}$, כאשר המכפלה הפנימית מוגדרת על-ידי

$$\langle p(x), q(x)\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \qquad (\forall p(x), q(x) \in V)$$

יהי $W^\perp$ המשלים הניצב לתת-המרחב $W := \text{span}\{1, x\}$. מצא בסיס עבור $W^\perp$:

$B =$ ______________________________

3. נתון כי $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ הם וקטורים במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbf{R}$ המקיימים:

$$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 2 \quad , \quad \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle = 1$$

חשב:

$\|\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2\| =$ ______________________

4. תהי $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ מוגדרת על-ידי

$$T(x,y,z) := (x+z, x+y+z, x-y+z) \qquad (\forall x,y,z \in \mathbf{R})$$

אזי:

א. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
ב. הפולינום האופייני של T אינו מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbf{R}$.
ג. T הפיכה.
ד. T ניתנת להצגה (בבסיס מתאים של $\mathbf{R}^3$) על-ידי מטריצה אלכסונית.

5. (גירסא לתלמידי צ. ארד ור. עדין בלבד) תהי $A \in \mathbf{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbf{F}$. אזי:

א. תמיד $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = A$.
ב. אם A הפיכה אז גם $\operatorname{adj}(A)$ הפיכה.
ג. קיימת A הפיכה כך שמתקיים: $\det(\operatorname{adj}(A)) \neq \det(A)^{n-1}$.
ד. אם A לא הפיכה אז $\operatorname{adj}(A) = 0$.

(גירסא לתלמידי ש. פייגלשטוק בלבד) יהי

$$B := \{\vec{v}_1 = (1,1,0)\,,\ \vec{v}_2 = (0,1,1)\,,\ \vec{v}_3 = (1,0,1)\}$$

בסיס עבור $\mathbf{R}^3$. הבסיס של $(\mathbf{R}^3)^*$ הדואלי ל- B הוא:

$B^* =$ ____________________________________

6. תהי $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, ותהי $T : \mathbf{R}^{2\times 2} \to \mathbf{R}^{2\times 2}$ מוגדרת על-ידי:

$$T(X) := MX - XM \qquad (\forall X \in \mathbf{R}^{2\times 2})$$

אזי:

א. $\dim(\ker(T)) = \dim(\operatorname{im}(T))$.
ב. המטריצה A המייצגת את T ביחס לבסיס הסדור הסטנדרטי של $\mathbf{R}^{2\times 2}$ מקיימת: $\operatorname{rank}(A) = 3$.
ג. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
ד. המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס הסדור הסטנדרטי של $\mathbf{R}^{2\times 2}$ היא הפיכה.

7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{F}$, ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. אזי:

א. אם $\ker(T) \subseteq \operatorname{im}(T)$ אז $T^2 = 0$.
ב. אם $\operatorname{im}(T) \subseteq \ker(T)$ אז $T^2 = 0$.
ג. $\operatorname{im}(T) \subseteq \operatorname{im}(T^2)$.
ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה בהכרח נכונה.

8. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbf{R}$, ותהיינה $S,T:V\to V$ העתקות לינאריות. נתון: S היא הפיכה, T היא אורתוגונלית. אזי:

א. $T^{-1}SS^*T$ היא הרמיטית (צמודה לעצמה).
ב. אף אחת מהתשובות האחרות אינה בהכרח נכונה.
ג. ST היא אורתוגונלית.
ד. STS^* היא אורתוגונלית.

9. תהי $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\in\mathbf{F}^{3\times3}$, כאשר $\mathbf{F}$ שדה כלשהו. אזי:

א. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
ב. A ניתנת ללכסון מעל $\mathbf{F}$, לכל שדה $\mathbf{F}$ ולכל $a\in\mathbf{F}$.
ג. A ניתנת ללכסון מעל $\mathbf{C}$ לכל $a\in\mathbf{C}$, אבל קיים $a\in\mathbf{R}$ כך ש-A אינה ניתנת ללכסון מעל $\mathbf{R}$.
ד. הפולינום x^2-3x+2 מאפס את המטריצה A, לכל שדה $\mathbf{F}$ ולכל $a\in\mathbf{F}$.

10. יהי $W:=\operatorname{span}\{(i,0,1)\,,\,(0,i,2)\}$ תת-מרחב של $\mathbf{C}^3$, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית:
$\langle(v_1,v_2,v_3)\,,\,(w_1,w_2,w_3)\rangle:=v_1\overline{w_1}+v_2\overline{w_2}+v_3\overline{w_3}$

מצא בסיס אורתונורמלי E עבור W: (בדוק את תשובתך!)

$E=$ ____________________________________

11. תהי

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{4\times4}$$

$V_\lambda\subseteq\mathbf{R}^4$ יסמן את מרחב הוקטורים העצמיים המתאימים לערך העצמי λ של A. אזי:

א. $\dim(V_2)+\dim(V_5)=3$.
ב. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
ג. $\dim(V_2)=3$.
ד. $V_2\oplus V_5=\mathbf{R}^4$.