

## אלגברה לינארית 2 (88-113-04)

### בחינת סיום (מועד א')

מרצה: ד"ר רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אסור להשתמש בכל חומר עזר, פרט למחשב-כיס פשוט.  
נא לרשום כאן את מספר מחברת הבחינה:

בבחינה זו 17 סעיפים (= "טוב" בגימטריה).  
כל סעיף של שאלה מס' 1 מזכה ב- 7 נקודות (2 סעיפים).  
כל סעיף של יתר השאלות מזכה ב- 6 נקודות (15 סעיפים).  
את שאלה מס' 1 יש לפתור באופן מפורט במחברת הבחינה.  
על יתר השאלות יש לענות במקומות המסומנים בשאלון עצמו; ניתן להשתמש במחברת כטיוטה לחישובים (אך לא בעמודים שבהם נכתב פתרון שאלה מס' 1).  
בסיום הבחינה -- נא למסור את השאלון ואת מחברת הבחינה.

*מהצחה!*

1. יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל  $\mathbf{C}$ , ויהי  $T: V \rightarrow V$  אופרטור לינארי.  
I. הוכח שהערכים העצמיים של  $T + T^*$  הם ממשיים.  
II. הוכח שאם  $T$  אופרטור נורמלי אז גם  $T^2 + T^*$  אופרטור נורמלי.

2. יהי  $W = \text{span} \{ (1, i, 0), (0, i, 1) \}$  תת-מרחב של  $V = \mathbf{C}^3$ . מצא בסיס אורתונורמלי  $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$  עבור  $W$  (ביחס למכפלה הפנימית הרגילה של  $\mathbf{C}^3$ ):

I.  $\vec{e}_1 =$  \_\_\_\_\_

II.  $\vec{e}_2 =$  \_\_\_\_\_

3. תהינה  $A, B \in F^{n \times n}$  מטריצות ריבועיות המקיימות:

$$\det(A) = \det(B)$$

$$\text{adj}(A) = \text{adj}(B)$$

מי מהתנאים הבאים, בתוספת לנתונים הנ"ל, מספיק כדי להסיק כי  $A = B$ ?  
(סמן בעיגול את התשובה הנכונה):

$$\det(A) = 0 \quad \parallel \quad \det(A) \neq 0 \quad \parallel \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \quad \parallel \quad \text{כל התשובות האחרות אינן נכונות.}$$

4. נתון שלאופרטור לינארי  $T: \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$  יש פולינום אופייני  $f_T(x) = x^3 + x$ . אזי:

- I. הערכים העצמיים של  $T$  הם: \_\_\_\_\_.
- II. ניתן לליכסון: כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).
- III. ניתן למישלוש: כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).
- IV.  $T$  אופרטור אוניטרי (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית):  
כן \ לא \ אין מספיק מידע (סמן בעיגול).

5. יהי  $T$  אופרטור לינארי עם פולינום אופייני  $f_T(x) = x^3(x-1)^3(x-2)$ .

- I. מספר צורות ג'ורדן האפשריות עבור  $T$  הוא: \_\_\_\_\_.
- II. אם ידוע גם שהפולינום המינימלי של  $T$  הוא  $m_T(x) = x(x-1)^2(x-2)$ , אז מספר צורות ג'ורדן האפשריות עבור  $T$  הוא: \_\_\_\_\_.

6. יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbf{R}$ , ויהיו  $\vec{v}, \vec{w} \in V$ . אזי:

- I. אם  $\vec{v}, \vec{w}$  הם וקטורי יחידה אז  $\vec{v} + \vec{w}$  אינו וקטור יחידה: נכון \ לא נכון (סמן בעיגול).
- II.  $\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| = |\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \Leftrightarrow \vec{v}, \vec{w}$  תלויים לינארית: נכון \ לא נכון (סמן בעיגול).

7. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 3}$$

אזי:

- I.  $\det(AA^t) =$  \_\_\_\_\_.
- II.  $\det(A^t A) =$  \_\_\_\_\_.

8. תהי  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$  העתקה לינארית שהצגתה בבסיסים הסטנדרטיים של  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{R}^4$  היא על-ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

אזי:

- I. האם  $(0, 3, 2, -3) \in \text{im } T$ ? כן \ לא (סמן בעיגול).
- II.  $\dim(\ker T) =$  \_\_\_\_\_.