שאלון סגור

מספר סידורי: 2001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 1

סמסטר קיץ ה'תשס"ה (מועד ב')
יום , ה'תשס"ה (. .05 למ')

מספר קורס: 88-112. **מרצים:** אלי מצרי וטל פרי. **מתרגלים:** מיטל אליהו ואפי כהן.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. אם שאלה מסויימת אינה ברורה, או שנראה לך כי יש בה טעות, נא כתוב לפני התשובה כיצד הבנת את השאלה והבודק יתחשב אם יש מקום לכך.
ג. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי (אמריקאי), ועליו יש לענות על גבי הטופס. לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ד. תנאי הכרחי לקבלת ציון "עובר" בבחינה הוא צבירת 60% לפחות מהציון המירבי בכל אחד משני חלקי הבחינה.
ה. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ו. שים לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

חלק א: שאלות פתוחות (40 נקודות)

ענה על שתי שאלות בדיוק מתוך שלושת השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. (20 נקודות)
יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי ויהיו B_1, B_2 שני בסיסים עבור V. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית.
א. הוכח כי $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}([T]_{B_2}^{B_1})$.
ב. תהי $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T((x, y, z, w)) = (2x + y, 2y + z, 2z + w, 2w + x)$.
מצא את $\mathrm{rank}(T)$.

שאלה 2. (20 נקודות)
תהי $Ax = b$ מערכת משוואות ב n נעלמים. נסמן $L = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = b\}$ ו $H = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$. יהי $v \in L$. נסמן $v + H = \{v + h : h \in H\}$.
א. הוכח כי $L = v + H$.
ב. כתוב בצורה הנ"ל את הפיתרון הכללי למערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 3. (20 נקודות)
א. תהיינה $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ ו $B \in \mathbb{F}^{m\times k}$, הוכח כי $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)$.
ב. הוכח כי אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה אז $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{-1}) = n$.
ג. הוכח כי אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה ו $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ אז $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(B)$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות *(60 נקודות: 5 נקודות לכל תשובה נכונה.)*

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. במקרה שיש יותר מתשובה נכונה אחת, יש להקיף את התשובה הנכונה המלאה והמדוייקת ביותר. חובה לענות על כל השאלות. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. $\ker(T)$ **חייב** להיות תת־מרחב של $\operatorname{im}(T)$ אם:

1. T אפימורפיזם.
2. אף פעם.
3. T מונומורפיזם.
4. תשובות (3) ו (1) נכונות.

שאלה 2. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו U ו W תת־מרחבים של V. **איזה מבין התנאים הבאים הכרחי ומספיק לנכונות הטענה הבאה:** קיימת העתקה לינארית $T: V \to V$ כך ש $\ker(T) = U$ ו $\operatorname{im} T = W$.

1. $\operatorname{char}(\mathbb{F}) > 0$.
2. $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$.
3. הטענה תמיד נכונה.
4. $\dim(V)$ זוגי.

שאלה 3. בחרו את התשובה **שאינה** נכונה:

1. $\operatorname{span}(\operatorname{span} A) = \operatorname{span} A$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\operatorname{span}(A \cap B) = \operatorname{span}(A) \cap \operatorname{span}(B)$.
4. $\operatorname{span}(A \cup B) = \operatorname{span}(A) + \operatorname{span}(B)$.

שאלה 4. תהי נתונה מערכת משוואות $Ax = b$. נניח שיש אינסוף פתרונות למערכת $Ax = 0$. אזי:

1. ל $Ax = b$ אין פתרון.
2. ל $Ax = b$ יש אינסוף פתרונות.
3. אף תשובה אינה נכונה.
4. ל $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

שאלה 5. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $x^3 + x^2 + 4 = 0$ ב $\mathbb{Z}_7$?

1. 1.
2. 2.
3. 3.
4. 0.

שאלה 6. יהי $[v]_E = (0,0)$ כאשר E הבסיס הסטנדרטי. ניתן למצוא בסיס B כך ש $[v]_B = (1,2)$ אם:

1. $\dim(V) < \infty$.
2. תמיד.
3. $\dim(V) = \infty$.
4. אף תשובה אינה נכונה.

שאלה 7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו A ו B תת קבוצות של V. נתבונן בטענות הבאות:

(א) $\operatorname{span}(A \cup B) = \operatorname{span}(A) \cup \operatorname{span}(B)$.

(ב) $\operatorname{span}(A \cap B) = \operatorname{span}(A) \cap \operatorname{span}(B)$.

(ג) נניח ש A בלתי תלויה לינארית ו B בלתי תלויה לינארית אז $\operatorname{span}(A) \cap \operatorname{span}(B) \neq \{0\}$ אם ורק אם $A \cup B$ תלויה לינארית.

(ד) $\operatorname{span}(\operatorname{span}(A)) = \operatorname{span}(A)$.

ציין את כל הטענות הנכונות:

1. (ב), (ג), (ד).
2. (א), (ג).
3. (א).
4. (ג), (ד).

שאלה 8. יהי V מרחב וקטורי ממימד 3 ויהי W תת־מרחב של V. ידוע ש $B = \{v_1, v_2\} \subseteq V$ בלתי תלויה לינארית ומקיימת $B \cap W = \emptyset$. אזי בהכרח:

1. $\dim(W) = 0$.
2. $W \cap \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \neq \{0\}$
3. $\dim(W) = 1$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 9. תהי $T : \mathbb{Z}_2[x] \to \mathbb{Z}_2$ העתקה לינארית כך ש $T(1+x) = T(x+x^2) = 0$ אז:

1. $T = O$.
2. $\dim(\ker T) \geq 2$.
3. $T(x^2+1) \neq 0$.
4. T אפימורפיזם.

שאלה 10. נתבונן בטענות הבאות:

(א) יהי V מרחב כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. אזי

$$V=\{f\in V:(\forall x\in\mathbb{R})f(-x)=f(x)\}\oplus\{f\in V:(\forall x\in\mathbb{R})\ f(-x)=-f(x)\}.$$

(ב) $\mathbb{F}^{n\times n}=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}:A=A^t\}\oplus\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}:A^t=-A\}$.

(ג) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו U ו W תת־מרחבים של V אזי $U\cup W$ הוא תת־מרחב של V.

(ד) יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $V_A=\{B\in\mathbb{F}^{n\times n}:BA=AB\}$. אזי V_A הוא תת־מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ציין את כל הטענות הנכונות בהכרח:

1. (א), (ב), (ד).
2. (א), (ב), (ג), (ד).
3. (ב).
4. (א), (ד).

שאלה 11. איזו מבין הטענות הבאות נכונה?

1. יהיו $V_1,V_2\subseteq V$ תת־מרחבים המקיימים $\dim(V)=7,\dim(V_2)=4,\dim(V_1)=5$. אזי $2\leq\dim(V_1\cap V_2)\leq 3$.
2. יהיו $V,W\subseteq V$ תת־מרחבים. אזי $V=U\oplus W\iff\dim(V)=\dim(U)+\dim(W)$.
3. יהיו $V,W\subseteq\mathbb{R}^9$ תת־מרחבים המקיימים $\dim(V)=4$, $\dim(W)=5$, וכן $V\not\subseteq W$. אזי $\dim(V\cap W)=3$.
4. יהיו $V,W\subseteq\mathbb{R}^{11}$, $W\not\subseteq V$ תת־מרחבים המקיימים $\dim(V)=10,\dim(W)=9$. אזי $\dim(V\cap W)=8$.

שאלה 12. תהי $A\in\mathbb{F}^{p\times p}$, כאשר p ראשוני. הטענה "לכל $B\in\mathbb{F}^{p\times p}$, אם $AB=0$, אז $B=0$" נכונה כאשר:

1. $\mathrm{char}(\mathbb{F})=p$
2. B הפיכה.
3. $A\neq O$.
4. A הפיכה.

בהצלחה!