שאלון סגור

מספר סידורי: 2001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 1 *(מועד ב')*

סמסטר קיץ התשס"ד, יום חמישי, ו' חשוון התשס"ה *(21.10.04 למ')*

מספר קורס: 88-112. **מרצה:** ד"ר בועז צבאן. **מתרגלים:** אלי מצרי, איילה בר־אילן.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, *גם לא במחשבון*.
משך הבחינה: שעתיים וחצי *(לא תינתן הארכה)*.
הנחיות:

א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.

ב. המרצה לא יהא נוכח בשעת הבחינה. אם שאלה מסויימת אינה ברורה, או שנראה לך כי יש בה טעות, נא כתוב לפני התשובה כיצד הבנת את השאלה והבודק יתחשב אם יש מקום לכך.

ג. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי *(אמריקאי)*, ועליו יש לענות על גבי הטופס. לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.

ד. תנאי הכרחי לקבלת ציון "עובר" בבחינה הוא צבירת 60% לפחות מהציון המירבי בכל אחד משני חלקי הבחינה.

ה. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן *(טפסי הבחינה ממוספרים)*.

ו. שים לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

חלק א: שאלות פתוחות *(25 נקודות עבור תשובה מלאה)*

ענה על *שאלה אחת בדיוק* מתוך שתי השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהיו V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, ותהא $T\in \mathrm{Hom}(V,W)$. יהא E בסיס סדור עבור V, ויהא F בסיס סדור עבור W. הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים: $[T]_F^E[v]_E=[T(v)]_F$.

שאלה 2. יהא $\mathbb{F}$ שדה. הוכח שלכל מטריצה $A\in \mathbb{F}^{m\times n}$, דרגת השורות של A שווה לדרגת העמודות של A.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות *(75 נקודות: 5 נקודות לכל תשובה נכונה, -2 נקודות לכל תשובה שגויה או היעדר תשובה.)*

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. במקרה שיש יותר מתשובה נכונה אחת, יש להקיף את התשובה הנכונה *המלאה והמדוייקת ביותר*. חובה לענות על כל השאלות. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. דני בחר שתי מטריצות $A,B\in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ וחישב את המטריצה $AB-BA$. איזה מהמטריצות הבאות יכולה להיות התוצאה?

1. $\begin{pmatrix}7&3\\5&11\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}3&4\\-4&3\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}3&-4\\6&-3\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

שאלה 2. יהיו $v_1,\dots,v_7 \in (\mathbb{Z}_7)^7$ בלתי תלויים לינארית, ונתונים $w_1,\dots,w_7 \in (\mathbb{Z}_7)^7$. יהיו $A = (v_1,\dots,v_7)$ *(עמודות המטריצה)* ו $B = (w_1,\dots,w_7)$ *(עמודות המטריצה)*. תהא $T : (\mathbb{Z}_7)^7 \to (\mathbb{Z}_7)^7$ ההעתקה הלינארית המקיימת $T(v_1) = w_1,\dots,T(v_7) = w_7$. אזי:

1. $[T] = BA^{-1}$.
2. $[T] = AB^t$.
3. $[T] = BA^t$.
4. $[T] = AB^{-1}$.

שאלה 3. $\mathbb{Z}_4$ עם חיבור וכפל מודולו 4 הינו:

1. שדה ממאפיין 2.
2. שדה ממאפיין 4.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. שדה ממאפיין 0.

שאלה 4. למערכת ההומוגנית $Ax = \vec{0}$, כאשר $A \in (\mathbb{Z}_5)^{2\times 4}$ היא המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ יש:

1. אין למערכת פתרון.
2. אינסוף פתרונות.
3. פתרון יחיד.
4. 25 פתרונות.

שאלה 5. תהא $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{2\times 3}, \mathbb{R}^5)$. אזי המטריצה המייצגת את T לפי בסיסים כלשהם היא מסדר:

1. 2×3.
2. 5×6.
3. 3×2.
4. 6×5.

שאלה 6. יהיו $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך שמתקיים $B = A + A^t$, $C = A - A^t$. אזי:

1. B, C סימטריות.
2. B אנטיסימטרית, C סימטרית.
3. B סימטרית, C אנטיסימטרית.
4. B, C אנטיסימטריות.

שאלה 7. יהיו V,W,X מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $T:V\to W$, $S:W\to X$ העתקות לינאריות ונניח ש S היא חד־חד־ערכית. אזי:

1. $S\circ T$ היא חד־חד־ערכית.
2. $\dim\operatorname{im}(S\circ T)=\dim\operatorname{im}(T)$
3. $\dim\operatorname{im}(S\circ T)=\dim\operatorname{im}(S)$
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 8. נגדיר $T\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ על ידי: $T(x,y)=(2x-y,3y+x)$. יהא $B=\{(1,-1),(-1,0)\}$. אזי:

1. $[T]_B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$.
2. $[T]_B=\begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix}$.
3. $[T]_B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$.
4. $[T]_B=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-1\end{pmatrix}$.

שאלה 9. הטענה "יש $T\in\operatorname{Hom}(V,V)$ כך ש $Tu=w$" נכונה:

1. לכל $u,w\in V$ כך ש $u\neq\vec{0}$.
2. לכל $u,w\in V$, ממשפט ההגדרה של העתקה לינארית.
3. לכל $u,w\in V$ כך ש $w\neq\vec{0}$.
4. לכל $u,w\in V$ כך שלפחות אחד מהם אינו $\vec{0}$.

שאלה 10. נתונים תת־מרחבים $U=\operatorname{span}\{(1,2,1),(1,2,2)\}$, $W=\operatorname{span}\{(1,1,2),(0,1,1)\}$ של $\mathbb{R}^3$. אזי:

1. $U+W\subset\mathbb{R}^3$, $\dim(U\cap W)=1$.
2. $U+W\subset\mathbb{R}^3$, $\dim(U\cap W)\neq 1$.
3. $U+W=\mathbb{R}^3$, $\dim(U\cap W)=1$.
4. $U+W=\mathbb{R}^3$, $\dim(U\cap W)\neq 1$.

שאלה 11. איזה מהקבוצות הבאות מהווה בסיס עבור

$$\operatorname{span}\{1+2x+3x^2,3+2x+x^2,-2+2x^2,7+6x+5x^2\}\ ?$$

1. $\{1+2x+3x^2,3+2x+x^2,-2+2x^2\}$.
2. $\{2+x,1+x+x^2\}$.
3. $\{2+x+x^2,3+2x+x^2\}$.
4. $\{1+2x+3x^2,3+2x+x^2,-2+2x^2,7+6x+5x^2\}$.

שאלה 12. תהא A מטריצה המקיימת $A^{512} = -I$. אזי:

1. A לאו דווקא הפיכה.
2. A לאו דווקא ריבועית.
3. $A^{-1} = A^{1023}$.
4. $A^{-1} = I - A$.

שאלה 13. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_7$ ויהיו $u, v, w \in V$ בלתי תלויים לינארית. אזי:

1. $u+v, v+w, w+u$ תלויים לינארית, וכן $u-v, w-v, w-u$ תלויים לינארית.
2. $u+v, v+w, w+u$ בלתי תלויים לינארית, אבל $u-v, w-v, w-u$ תלויים לינארית.
3. $u+v, v+w, w+u$ תלויים לינארית, אבל $u-v, w-v, w-u$ בלתי תלויים לינארית.
4. $u+v, v+w, w+u$ בלתי תלויים לינארית, וכן $u-v, w-v, w-u$ בלתי תלויים לינארית.

שאלה 14. יהיו $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ וקטורים תלויים לינארית אך שונים מ $\vec{0}$. נגדיר

$$V = \{T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : v_1, v_2 \in \ker(T)\}.$$

אזי המימד של V הוא:

1. 6.
2. 3.
3. 9.
4. 0.

שאלה 15. יהא $V = \{(x_1, \ldots, x_{1024}) \in \mathbb{R}^{1024} : \sum_{i=1}^{1024} 2^i x_i = 0\}$. אזי המימד של V כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ הוא:

1. 1023.
2. 1024
3. $\sum_{i=1}^{1024} 2^i$.
4. 1.

בהצלחה!