שאלון סגור

מספר סידורי: 1004

מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 1

סמסטר א' ה'תשס"ב (מועד ב')

יום ראשון, ב' אייר ה'תשס"ב (14.4.02 למ')

מספר קורס: 88-112-01/04/07/11/16.

מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן ואנדרי רזניקוב.

מתרגלים: אושרית אברוצקי, חגי אהרונוביץ, ודים אוסטפנקו, גיל בן־ארצי, דבורה כהן ולודה מרקוס.

חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.

הנחיות:

א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.

ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.

ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).

ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות ונוסחאות עזר

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

א.

$$\begin{aligned} F^{n\times 1} &= F^n \\ F^{m\times n} &= M_{m,n}(F) = M_{m\times n}(F) \\ r(A) &= \operatorname{rank}(A) \end{aligned}$$

ב. אברי השדה $\mathbb{Z}_p$ יסומנו: $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}$.

חלק א: שאלות פתוחות (44 נקודות)

ענה על השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. א. (15 נקודות) יהא $V=\mathbb{R}^n$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ונגדיר

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1,\ldots,x_n)\in V : x_1+\cdots+x_n=0\} \\ W_2 &= \{(x_1,\ldots,x_n)\in V : x_1=\cdots=x_n\} \end{aligned}$$

הוכח: $V=W_1\oplus W_2$.

ב. (7 נקודות) הפרך את הטענה המקבילה לזו שבסעיף (א) כאשר $V=(\mathbb{Z}_2)^4$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$.

שאלה 2. א. (5 נקודות) הגדר: סכום ישר של תת־מרחבים.

ב. (17 נקודות) יהיו U ו W תת־מרחבים של מרחב וקטורי V, כך ש $V=U\oplus W$. יהיו: $B_U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ בסיס של U; $B_W=\{w_1,\ldots,w_k\}$ בסיס של W. הוכח ש $B_U\cup B_W$ בסיס של V.

הערה: אין להשתמש בנוסחת המימד של סכום תת־מרחבים (משפט המימדים).

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (56 נקודות: 7 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. נתונים הבסיסים הבאים עבור $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,2),(3,2)\} \\ B_2 &= \{(2,0),(3,1)\} \end{aligned}$$

ויהי $v\in\mathbb{R}^2$ כך ש $[v]_{B_1}=(-1,2)$. אזי:

1. $[v]_{B_2}=(\frac{5}{2},-3)$.
2. $[v]_{B_2}=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.
3. $[v]_{B_2}=(1,-1)$.
4. $[v]_{B_2}=(-\frac{1}{2},2)$.

שאלה 2. יהיו $v_1=(1,i,i)$, $v_2=(2i,1,1)$, $v_3=(2-2i,-1+2i,-1+2i)$ וקטורים ב $\mathbb{C}^3$, ויהי $V=\text{span}\{v_1,v_2,v_3\}$. בסיס עבור V הוא:

1. $\{(1,i,i),(0,i,-i)\}$.
2. $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$.
3. $\{(1,i,i),(0,0,i)\}$.
4. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

שאלה 3. יהי F שדה, ויהיו $A,B\in F^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם $A+B$ הפיכה וכן $A-B$ הפיכה, אזי A וכן B הפיכות.
2. אם A ו B הפיכות, אז $A+B$ הפיכה, או $A-B$ הפיכה (או שתיהן).
3. אם $\operatorname{rank}(AB)<\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$, אזי A אינה הפיכה וגם B אינה הפיכה.
4. A הפיכה אם ורק אם AB הפיכה.

שאלה 4. יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם קיים פיתרון למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ ו B מתקבלת מ A על ידי פעולות שורה אלמנטריות, אזי קיים פיתרון למערכת $B\vec{x}=\vec{b}$.
2. יהי $\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$ בסיס עבור $\mathbb{R}^n$. אם לכל $i=1,\dots,n$ קיים פיתרון למערכת $A\vec{x}=\vec{b}_i$, אז לכל $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ קיים פיתרון למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$.
3. אם לכל $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ קיים פיתרון למערכת $AB\vec{x}=\vec{b}$, אזי B אינה הפיכה.
4. אם קיים פיתרון לא טריויאלי למערכת $AB\vec{x}=\vec{0}$, אזי B אינה הפיכה.

שאלה 5. מספר הפתרונות של המשוואה $x^4-\bar{2}x^2+x+\bar{1}=\bar{0}$ ב $\mathbb{Z}_5$ הוא:

1. 1
2. 2
3. 0
4. 3

שאלה 6. יהי F שדה, יהיו $v_1,\dots,v_n\in F^n$, ותהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה כך ש $Av_1,\dots,Av_n$ הם בלתי תלויים לינארית. נתבונן בשלש הטענות הבאות:
א. A הפיכה.
ב. $v_1,\dots,v_n$ הם בלתי תלויים לינארית.
ג. $A^tv_1,\dots,A^tv_n$ הם בלתי תלויים לינארית.
אזי:

1. רק טענה ב נכונה.
2. רק טענות א,ב נכונות.
3. רק טענה א נכונה.
4. כל הטענות נכונות.

שאלה 7. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

סכום האיברים בעמודה השלישית (כלומר הימנית) של המטריצה A^{-1} הוא:

1. 2.
2. 1.
3. 3.
4. 0.

שאלה 8. נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$ (כאשר $a \in \mathbb{Z}_3$ הוא פרמטר):

$$\begin{aligned} x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 &= \bar{2} \\ \bar{2}x_1 + (a+\bar{2})x_2 + (\bar{2}a+\bar{1})x_3 &= \bar{1} \\ \bar{2}x_1 + x_2 + (a+\bar{2})x_3 &= \bar{2} \end{aligned}$$

אזי:

1. יש למערכת פיתרון יחיד אם ורק אם $a = \bar{1}$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. יש למערכת אינסוף פתרונות עבור $a = \bar{2}$.
4. לכל ערך של a, יש למערכת פיתרון.

בהצלחה!