שאלון סגור

מספר סידורי: 1001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 1

סמסטר א' ה'תשס"א (מועד ב')
יום ראשון, י"ג אייר ה'תשס"א (6.5.01 לא')

מספר קורס: 88-112-01/07/14/18.
מרצים: צבי ארד, רון עדין, שלום פייגלשטוק ובועז צבאן.
מתרגלים: אושרית אברוצקי, חגי אהרונוביץ, ניר אלקיים, הראל בדיחי ולודה מרקוס.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, *גם לא במחשבון*.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלה פתוחה, עליה יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי.

הגדרות ונוסחאות עזר

א. הסימונים הבאים (בקבוצות תרגול שונות) שקולים זה לזה:

$$\begin{aligned} F^{n\times 1} &= F^n \\ F^{m\times n} &= F_{m\times n} = M_{m\times n}(F) \end{aligned}$$

ב. זהויות טריגונומטריות בסיסיות:

$$\begin{aligned} \pi &= 180^\circ \\ \sin(\pi/3) &= \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \\ \sin(\pi/4) &= \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ \sin(\pi/6) &= \cos(\pi/3) = 1/2 \end{aligned}$$

חלק א: שאלה פתוחה (20 נקודות)

ענה על השאלה הבאה. את התשובה/הוכחה עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהיו $U, W \subseteq V$ תת־מרחבים.
א. (15 נקודות) הוכח: $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W)$.
ב. (5 נקודות) נניח ש $V = U \oplus W$. הוכח: $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

חלק ב: שאלות רב–ברירתיות (80 נקודות: 8 נקודות לכל שאלה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהא V מרחב וקטורי ממימד 3 מעל שדה F, ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$ כך שמתקיים $v_1 + v_2 + v_3 = \vec{0}$. אזי בהכרח:

1. $V \neq \mathrm{span}\{v_1\} + \mathrm{span}\{v_2\} + \mathrm{span}\{v_3\}$.
2. $\dim(\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}) = 2$.
3. $V = \mathrm{span}\{v_1\} + \mathrm{span}\{v_2\} + \mathrm{span}\{v_3\}$.
4. $\dim(\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}) = 1$.

שאלה 2. המרחבים

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{span}\{(1,1,2),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3 \\ V &= \mathrm{span}\{(1,2,3),(1,2,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

מקיימים:

1. $U \cap V \subseteq \mathbb{R}^3$ תת־מרחב, וכן $U \cup V \subseteq \mathbb{R}^3$ תת־מרחב.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $U + V = \mathbb{R}^3$ ו $\dim(U \cap V) = 1$.
4. $\dim(U + V) = 2$ ו $\dim(U \cap V) = 1$.

שאלה 3. תהא

$$A = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

מטריצה מעל $\mathbb{Z}_5$. סכום האיברים בעמודה השלישית (כלומר הימנית) של המטריצה ההופכית A^{-1} מעל $\mathbb{Z}_5$ הוא:

1. $\bar{4}$.
2. $\bar{1}$.
3. $\bar{3}$.
4. $\bar{2}$.

שאלה 4. נתונה מערכת המשוואות הבאה (עם פרמטר a) מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} x_1 + a^2 x_2 + x_3 &= \bar{0} \\ x_1 + x_2 + a^2 x_3 &= \bar{1} \\ x_1 + x_2 + (\bar{2}a^2 + \bar{2}a^4)x_3 &= \bar{1} + a \end{aligned}$$

אזי:

1. למערכת יש שלושה פתרונות כאשר $a = \bar{0}$.
2. אין ערך של a שעבורו יש פתרון למערכת.
3. $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{1})$ הוא פתרון של המערכת כאשר $a = \bar{0}$.
4. למערכת יש פתרון יחיד כאשר $a = \bar{2}$.

שאלה 5. נגדיר על $\mathbb{R}^2$ חיבור וכפל בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \end{aligned}$$

אזי:

1. $\mathbb{R}^2$ מהווה שדה ביחס לפעולות אלה.
2. $\mathbb{R}^2$ אינו מהווה שדה ביחס לפעולות אלה, וגם אם נשנה את הגדרת הכפל, לא יתקבל שדה.
3. $\mathbb{R}^2$ אינו מהווה שדה ביחס לפעולות אלה, וגם אם נשנה את הגדרת החיבור, לא יתקבל שדה.
4. $\mathbb{R}^2$ אינו מהווה שדה ביחס לפעולות אלה, אך ניתן לשנות את הגדרת הכפל כך שיתקבל שדה.

שאלה 6. יהיו $A \in F^{m \times n}$ ו $\vec{0} \neq \vec{b} \in F^m$. יהיו $v_1, v_2 \in F^n$ (וקטורי עמודה) פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $A\vec{x} = \vec{b}$, ויהיו $u_1, u_2 \in F^n$ (וקטורי עמודה) פתרונות של המערכת ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$. תהא

$$C = (2v_1 - v_2 + 5u_1, 2u_1 - u_2 + 5v_1) \in F^{n \times 2}$$

(המטריצה שעמודותיה הן הוקטור $2v_1 - v_2 + 5u_1$ והוקטור $2u_1 - u_2 + 5v_1$).

אזי מכפלת המטריצות AC שווה למטריצה שעמודותיה הן:

1. $(6\vec{b}, \vec{b})$.
2. $(\vec{0}, \vec{0})$.
3. $(\vec{b}, 5\vec{b})$.
4. $(\vec{b}, \vec{b})$.

שאלה 7. תהא A מטריצה ריבועית מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$, כך שהמטריצה $A+A^2$ הפיכה. אזי:

1. המטריצה $A+I$ הפיכה, אך המטריצה A לא בהכרח הפיכה.
2. קיים וקטור $\vec{b}$ כך שלמערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ יש אינסוף פתרונות.
3. המטריצות A ו $A+I$ הפיכות.
4. המטריצה A הפיכה, אך $A+I$ לא בהכרח הפיכה.

שאלה 8. המספר $\mathbb{C} \ni z=\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$ הוא:

1. מספר מדומה טהור (כלומר מהצורה ai כאשר a ממשי).
2. מספר ממשי חיובי.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. מספר ממשי שלילי.

שאלה 9. המימד של $\text{span}\{(1,2,3),(2,3,4),(3,5,8)\}$ במרחב $\mathbb{R}^3$ הוא:

1. 1.
2. 2.
3. 0.
4. 3.

שאלה 10. יהיו $A,B \in F^{5\times 5}$ מטריצות המקיימות $\text{rank}(A)=\text{rank}(B)=5$. אזי בהכרח:

1. $\text{rank}(A-B)=0$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\text{rank}(A+B)=5$.
4. $\text{rank}(A+B)<5$.

בהצלחה!