

אלגברה לינארית 1 (01/04/07-112-88) בחינת סיום (מועד ב')

מרצים: פרופ' צ. ארז, ד"ר ר. עדין, פרופ' ש. פייגלשטוק

משך הבחינה: שעותיים (120 דקות).
אסור להשתמש בכל חומר עזר, פרט למחשב-כיס פשוט. נא לענות על כל השאלות.
בשאלה מס' 1 יש לרשום הוכחה מפורטת ומדויקת במחברת הבחינה. על יתר השאלות יש לענות ע"י סימון התשובה הנכונה בשאלון עצמו; ניתן להשתמש לטייטה במחברת הבחינה (אך לא בעמודים שבהם נפתרה שאלה מס' 1).
תשובה מלאה על שאלה מס' 1 מזכה ב-20 נקודות. תשובה נכונה על כל שאלה אחרת מזכה ב-9 נקודות.
בסיום הבחינה - נא למסור את השאלון ואת מחברת הבחינה.

בהצלחה !

הערה: הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$\mathbf{F}^{n \times 1} = \mathbf{F}^n$$

$$\mathbf{F}^{n \times n} = \mathbf{F}_{n \times n} = M_n(\mathbf{F})$$

1. יהיו: V מרחב וקטורי; W_1, W_2 תת-מרחבים של V ; S_1 בסיס של W_1 , S_2 בסיס של W_2 , ונתון:
 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

הוכח: $S_1 \cup S_2$ הוא בסיס של $W_1 + W_2$ אם ורק אם $W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$.

2. נתונה מערכת המשוואות הלינאריות (מעל $\mathbf{R}$)

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

כאשר $a \in \mathbf{R}$ קבוע. אזי:

- קיים ערך של a שעבורו אין פתרון למערכת.
- לכל ערך של a אין פתרון יחיד למערכת.
- קיימים שני ערכים של a שעבורם יש יותר מפתרון אחד למערכת.
- אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

3. יהי $z \in \mathbf{C}$ המקיים $z^3 = \bar{z}^3$. מצא איזו מן הטענות הבאות נכונה:

א. $\text{Im}(z) = 0$

ב. $|z| = 1$

ג. $\text{Re}(z) = 0$

ד. אף אחת מהטענות האחרות איננה בהכרח נכונה.

4. מספר הפתרונות $x \in \mathbb{Z}_7$ של המשוואה $x^3 + x^2 + \bar{4} = \bar{0}$ הוא:

- א. 0.
- ב. 1.
- ג. 2.
- ד. 3.

5. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

אזי:

- א. קיימת $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך שמתקיים: $\text{rank}(AB) < \text{rank}(B)$.
- ב. A היא מטריצה הפיכה, וכל רכיבי A^{-1} שונים מאפס.
- ג. A^t היא מטריצה הפיכה, והרכיב בשורה 1 ועמודה 3 של $(A^t)^{-1}$ הוא 6.
- ד. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

6. יהיו W_1, W_2 תת-מרחבים של מרחב וקטורי V . מצא איזו מן הטענות הבאות נכונה:

- א. אם $\dim W_1 \leq \dim W_2$ אז $W_1 \subseteq W_2$.
- ב. אם $W_1 \subseteq W_2$ אז $\dim W_1 \leq \dim W_2$.
- ג. $\dim(W_1 \cap W_2) \geq \min(\dim W_1, \dim W_2)$.
- ד. $\dim(W_1 \cup W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

7. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך שמתקיים: A הפיכה, B אינה הפיכה. אזי:

- א. $A^{-1}BA$ הפיכה.
- ב. $A^{-1} + B$ אינה הפיכה.
- ג. $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.
- ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה בהכרח נכונה.

8. נתון שהוקטור $\bar{x}_1$ וגם הוקטור $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ הם פתרונות של אותה מערכת משוואות לינאריות $A\bar{x} = \bar{b}$. אזי:

- א. גם $\bar{x}_2$ הוא פתרון של המערכת הנ"ל.
- ב. קיים סקלר α כך שמתקיים $\bar{x}_2 = \alpha \bar{x}_1$.
- ג. $\bar{x}_2 = \bar{0}$.
- ד. אף אחת מהטענות האחרות אינה בהכרח נכונה.

9. תהיינה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 8 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 4}$$

$$S = \{(1, -11, 2, -8), (0, 7, -1, 6)\} \subseteq \mathbf{R}^{1 \times 4}$$

אזי:

- א. S היא בסיס למרחב השורות של A .
 ב. S פורשת את מרחב השורות של A , אך איננה בסיס עבורו.
 ג. S איננה מוכלת במרחב השורות של A .
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

10. למערכת המשוואות הבאה, מעל $\mathbf{Z}_7$:

$$\begin{cases} x + \bar{3}y + z = \bar{2} \\ \bar{3}x + y + \bar{5}z = \bar{3} \\ \bar{2}x + \bar{5}y + \bar{4}z = \bar{3} \end{cases}$$

- א. אין פתרונות.
 ב. יש פתרון יחיד.
 ג. יש 7 פתרונות.
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.