שאלון סגור

מספר סידורי: 2001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 1

סמסטר קיץ ה'תשס"ה *(מועד א')*
יום רביעי, כ"ו במנחם אב ה'תשס"ה *(31.8.05 למ׳)*

מספר קורס: 88-112. **מרצים:** אלי מצרי וטל פרי. **מתרגלים:** מיטל אליהו ואפי כהן.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר.
משך הבחינה: שעתיים וחצי *(לא תינתן הארכה).*
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. אם שאלה מסוימת אינה ברורה, או שנראה לך כי יש בה טעות, נא כתוב לפני התשובה כיצד הבנת את השאלה והבודק יתחשב אם יש מקום לכך.
ג. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי *(אמריקאי)*, ועליו יש לענות על גבי הטופס. לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ד. תנאי הכרחי לקבלת ציון "עובר" בבחינה הוא צבירת 60% לפחות מהציון המירבי בכל אחד משני חלקי הבחינה.
ה. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן *(דפי הבחינה ממוספרים).*
ו. שים לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

חלק א: שאלות פתוחות *(40 נקודות)*

ענה על שתי שאלות בדיוק מתוך שלושת השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. *(20 נקודות)*

א. הוכח כי קבוצה פורשת מינימלית היא בסיס.

ב. הוכח כי קבוצה בלתי תלויה מקסימלית היא בסיס.

ג. תהי

$$B = \{(1,2,3,4),(5,4,3,2),(5,3,2,4),(1,2,1,2),(6,5,3,6),(5,7,8,2)\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

הוכח כי $\operatorname{span}(B) = \mathbb{R}^5$ ומצא בסיס המוכל ב B.

שאלה 2. *(20 נקודות)*

א. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח *(בכל דרך שתבחר)* כי A הפיכה אם ורק אם A הפיכה משמאל.

ב. בדוק האם

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

הפיכה. אם כן, מצא את A^{-1}.

שאלה 3. *(20 נקודות)*

יהי V מרחב וקטורי ממימד n ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V,V)$ העתקה נילפוטנטית מסדר n.

א. הוכח כי קיים $v \in V$ כך שהקבוצה $B = \{v, T(v), T^2(v), T^3(v)...., T^{n-1}(v)\}$ מהווה בסיס עבור V.

ב. מצא את $[T]_B$ עבור $n = 5$.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות *(60 נקודות: 5 נקודות לכל תשובה נכונה.)*

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. במקרה שיש יותר מתשובה נכונה אחת, יש להקיף את התשובה הנכונה המלאה והמדוייקת ביותר. חובה לענות על כל השאלות. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, כך ש A הפיכה. אזי בהכרח:

1. מרחב הפתרונות של $Bx = 0$ זהה למרחב הפתרונות של $ABx = 0$.
2. מרחב הפתרונות של $Ax = 0$ זהה למרחב הפתרונות של $ABx = 0$.
3. מרחב הפתרונות של $Bx = 0$ זהה למרחב הפתרונות של $Ax = 0$.
4. מרחב הפתרונות של $Bx = 0$ זהה למרחב הפתרונות של $ABx = 0$ רק אם B מטריצה הפיכה.

שאלה 2. יהיו $z \in \mathbb{C}$ כך ש $z^3 = \overline{z}^3$ אזי בהכרח:

1. $\mathrm{Im}(z) = 0$.
2. $\mathrm{Re}(z) = 0$.
3. $|z| = 1$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 3. יהי V מרחב וקטורי, ותהא $B \subseteq V$. להלן שתי טענות:

(א) B בסיס של V.

(ב) לכל קבוצה $A \subseteq B$ מתקיים $V = \mathrm{span}(A) \oplus \mathrm{span}(B \setminus A)$.

אזי:

1. טענה (א) גוררת את טענה (ב).
2. טענה (ב) גוררת את טענה (א).
3. אף אחת מהטענות אינה גוררת את השניה.
4. טענה (א) שקולה לטענה (ב).

שאלה 4. המימד של $\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{R}$ הוא:

1. $n + 1$.
2. $2n$.
3. 4.
4. n.

שאלה 5. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{p\times p}$, כאשר p ראשוני. אם $AB - BA = I$ אז בהכרח:

1. $\mathbb{F}$ שדה סופי.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p$.
4. $A, B \in {\mathbb{Z}_p}^{p\times p}$.

שאלה 6. יהי $V=\mathbb{R}^2$ ויהיו $B_1=\{(1,1),(1,2)\}$ ו $B_2=\{v_1,v_2\}$ בסיסים עבור V. תהי $M\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצת מעבר מ B_1 אל B_2 (כלומר $M[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$). נתון $M(1,0)^t=(1,1)^t$, $M(-1,1)^t=(0,1)^t$. אזי:

1. $v_1=e_1, v_2=e_2$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. $v_1=e_1, v_2=(1,1)$.
4. $v_1=e_2, v_2=(1,1)$.

שאלה 7. כמה פתרונות יש למערכת

$$\begin{aligned} x+y-10z &= 0\\ 10x+10y-21z &= 0\\ 22x+11y+2z &= 0 \end{aligned}$$

מעל $\mathbb{Z}_{11}$?

1. אינסוף.
2. 11.
3. אחד.
4. אף פיתרון.

שאלה 8. יהי V מרחב וקטורי ממימד 5 מעל $\mathbb{Z}_3$. נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש $\operatorname{rank}(T)=3$ אזי:

1. $|\operatorname{im}(T)|=9$ ו $|\ker(T)|=27$.
2. $|\operatorname{im}(T)|=27$ ו $|\ker(T)|=9$.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. $|\operatorname{im}(T)|=18$ ו $|\ker(T)|=27$.

שאלה 9. ידוע שהמטריצה הבאה היא בצורה קנונית אבל חסרים כמה מספרים.

$$A=\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & * & *\\ 0 & 0 & 0 & * & 1\\ 0 & * & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי למערכת המשוואות $Ax=0$ מעל $\mathbb{R}$ הוא:

1. $x=(t,0,0,s,0)$ $(t,s\in\mathbb{R})$.
2. $x=(0,0,0,0,0)$.
3. $x=(0,t,0,0,0)$ $(t\in\mathbb{R})$.
4. $x=(0,0,t,0,0)$ $(t\in\mathbb{R})$.

שאלה 10. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נתבונן בטענות הבאות:

(א) $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

(ב) $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

(ג) $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(B)$.

(ד) $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A) > \operatorname{rank}(B)$.

ציין את כל הטענות שעבורן יש מטריצות A, B כך שהן מתקיימות:

1. (א), (ב), (ג).
2. כל הטענות נכונות.
3. (ב), (ג).
4. (א), (ד).

שאלה 11. יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהי $T : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $T(a) = a^p$ לכל $a \in \mathbb{F}$. T היא העתקה לינארית מעל $\mathbb{Z}_p$ אם:

1. $p = 2, 3$.
2. אף פעם.
3. $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = p$.
4. $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$.

שאלה 12. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

ויהיו E_{43}, E_{23} מטריצות בסיסיות מסדר 5×5. איזו מבין הטענות הבאות לגבי המטריצה $B = E_{43}AE_{23}$ נכונה?

1. $b_{32} = 18$.
2. $b_{43} = 12$.
3. $b_{23} = 14$.
4. $b_{34} = 8$.

בהצלחה!