

## מבחן באלגברה לינארית 1

סמסטר א' ה'תשס"ב (מועד א')  
יום רביעי, י"ט שבט ה'תשס"ג (22.1.03 למ')

**מספר קורס:** 88-112-07/11/14/17/19/22.

**מרצים:** טל נוביק, גרגורי סופר, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי, אנדרי רזניקוב.

**מתרגלים:** אושרית אברוצקי, רועי בן-ארי, דבורה כהן, אלי מצרי, לודה מרקוס, מישאל סקלרץ, דבורה קפלן, ענבל שובל.

**חומר עזר:** אין להשתמש בחומר עזר, **גם לא במחשבוני**.  
**הנחיות:**

- א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
  - ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב-ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
  - ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
  - ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
- משך הבחינה:** שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

### הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:  
א.

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^{n \times 1} &= \mathbb{F}^n \\ \mathbb{F}^{m \times n} &= M_{m,n}(\mathbb{F}) = M_{m \times n}(\mathbb{F}) \\ r(A) &= \text{rank}(A)\end{aligned}$$

ב. אברי השדה  $\mathbb{Z}_p$  יסומנו:  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}$ .

ג. המטריצה המייצגת העתקה  $T$  ביחס לבסיס נתון  $B$  מסומנת לעיתים  $[T]_B^B$ , או  $[T]_B$ , או  $[T]_{B,B}$ .

## חלק א: שאלות פתוחות (44 נקודות)

ענה על השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטייטה של פתרונות חלק ב'.

### שאלה 1.

נגדיר העתקה  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  על ידי:

$$T(x, y, z, t) = (0, x, y, y + z)$$

לכל  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ .

א. (6 נקודות) הוכח ש  $T$  היא העתקה לינארית.

ב. (8 נקודות) חשב את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות  $T, T^2, T^3, T^4$ , וכולי, ביחס לבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^4$ .

ג. (8 נקודות) חשב את  $\dim(\ker T)$  ואת  $\dim(\operatorname{im} T)$ .

### שאלה 2.

א. (8 נקודות) הגדר: קבוצה בלתי תלויה לינארית; בסיס.

ב. (14 נקודות) יהיו  $V$  ו  $W$  תת-מרחבים של מרחב וקטורי  $U$ . יהיו  $\{v_1, \dots, v_k\}$  בסיס עבור  $V$  ו  $\{w_1, \dots, w_m\}$  בסיס עבור  $W$ . הוכח: הוקטורים  $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m$  הם בלתי תלויים לינארית אם ורק אם  $V \cap W = \{0\}$ .

## חלק ב: שאלות רב-ברירתיות (56 נקודות: 7 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. תהא  $T : V \rightarrow W$  העתקה לינארית, ויהיו  $v_1, \dots, v_k \in V$ . אזי:

1. אם  $v_1, \dots, v_k$  תלויים לינארית, אז  $T(v_1), \dots, T(v_k)$  תלויים לינארית.

2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

3. אם  $\ker T = \{0\}$ , אז  $T(v_1), \dots, T(v_k)$  בלתי תלויים לינארית.

4. אם  $v_1, \dots, v_k$  בלתי תלויים לינארית, אז  $T(v_1), \dots, T(v_k)$  בלתי תלויים לינארית.

**שאלה 2.** ל  $V = \mathbb{Z}_2^2$  (כמרחב וקטורי מעל  $\mathbb{Z}_2$ ) יש:

1. 2 תת-מרחבים ממימד 1, וכל אחד מהם מכיל 3 וקטורים.
2. 2 תת-מרחבים ממימד 1, וכל אחד מהם מכיל 2 וקטורים.
3. 3 תת-מרחבים ממימד 1, וכל אחד מהם מכיל 2 וקטורים.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

**שאלה 3.** יהיו  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ו  $b \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ . אזי בהכרח:

1. אם למערכת  $Ax = b$  יש פיתרון, אז למערכת  $A^t x = b$  יש פיתרון.
2. ייתכן שלמערכת  $Ax = 0$  יש פיתרון יחיד, ולמערכת  $A^t x = 0$  יש יותר מפיתרון אחד.
3. אם למערכת  $Ax = b$  יש פיתרון יחיד, אז למערכת  $A^t x = b$  יש פיתרון יחיד.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

**שאלה 4.** תהא  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . אזי:

1. אם  $A^2 = I$ , אז  $A = I$  או  $A = -I$ .
2. אם  $A^2$  הפיכה, אז  $A$  הפיכה.
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. אם  $A^2 = 0$ , אז  $A = 0$ .

**שאלה 5.** יהא  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ . אזי  $z^{5763}$  שווה ל:

1.  $z$
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3.  $z^2$
4.  $z^3$

**שאלה 6.** תהא  $\mathbb{Z}_3^{3 \times 3} \in A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ . הרכיב בשורה 2, עמודה 2 של  $A^{-1}$  הוא:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

2.  $\bar{0}$ .

3.  $\bar{1}$ .

4.  $\bar{2}$ .

**שאלה 7.** תהא  $T : V \rightarrow W$  העתקה לינארית. אזי:

1. אם  $\dim \operatorname{im} T > \dim \ker T$  אז  $T$  אינה חד-חד ערכית.

2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

3. אם  $\dim V > \dim W$  אז  $T$  אינה חד-חד ערכית.

4. אם  $\dim V > \dim W$  אז  $T$  אינה "על".

**שאלה 8.** (תזכורת: מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  היא סימטרית אם  $A^t = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^t = -A$ ). יהיו  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצות סימטריות. אזי בהכרח:

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

2.  $AB$  סימטרית.

3.  $ABA$  סימטרית.

4.  $AB$  אנטי-סימטרית.

בהצלחה!