פתרון הבחינה באלגברה לינארית 1, תשס"ב מועד א'/בועז צבאן, ינואר 2002 למי'

חלק א: שאלות פתוחות

שאלה 1. א. (הגדרות) נא לעיין בהרצאה.

ב. **טענה**. תהי $D\subseteq V$ קבוצה כלשהי. אם $C\subseteq \operatorname{span}(D)$ אז D פורשת. לכן, אם D אינה פורשת, אזי יש $v\in C$ כך ש $v\notin \operatorname{span}(D)$.

הוכחת הטענה: אם $C\subseteq \operatorname{span}(D)$ אז $V=\operatorname{span}(C)\subseteq \operatorname{span}(D)\subseteq V$, לכן D פורשת. ■

נשתמש במשפטון הבא, שהוכח בהרצאה:

משפטון. אם B קבוצה בת"ל ו $v\notin \operatorname{span}(B)$, אז $B\cup\{v\}$ בת"ל.

מסקנה. אם $B\subseteq V$ קבוצה בת"ל שאינה פורשת, ו $C\subseteq V$ פורשת, אז יש $v\in C$ כך ש $v\notin B$ ו $B\cup\{v\}$ בת"ל.

הוכחת המסקנה: לפי הטענה, יש $v\in C$ כך ש $v\notin \operatorname{span}(B)$ (ובפרט $v\notin B$). לפי המשפטון, זה גורר ש $B\cup\{v\}$ בת"ל.■

נתחיל עם $\emptyset$. אם $\emptyset$ פורשת את V אז הטענה הוכחה (ובמקרה זה $V=\{\vec{0}\}$).

אחרת, לפי המסקנה יש $v_{i_1}\in C$ כך ש $\{v_{i_1}\}=\emptyset\cup\{v_{i_1}\}$ בת"ל.

אם $\{v_{i_1}\}$ פורשת, הטענה הוכחה. אחרת, לפי המסקנה יש $v_{i_2}\in V$ כך ש $v_{i_2}\notin\{v_{i_1}\}$ ו $\{v_{i_1},v_{i_2}\}$ בת"ל.

נמשיך בתהליך עד שמתקבלת קבוצה בת"ל $B=\{v_{i_1},\dots,v_{i_l}\}$ שהיא פורשת.

התהליך נמשך לכל היותר k צעדים, כיון שלאחר k צעדים מתקבלת הקבוצה C כולה, שהיא פורשת (הגודל של B אחרי l צעדים הוא בדיוק l. אחרי k צעדים מתקבל תת-קבוצה של C בגודל k. כיון שהגודל של C הוא לכל היותר k, יתקיים $B=C$).□

[למי שרוצה להיות יותר מדוייק, הבניה של B היא באינדוקציה: נתחיל עם $\emptyset$. נניח באינדוקציה שיש לנו תת-קבוצה בת"ל בגודל l, $\{v_{i_1},\dots,v_{i_l}\}$, של C. אם הקבוצה פורשת הטענה הוכחה. אחרת, לפי המסקנה יש $v_{i_{l+1}}\in C$ שאינו נמצא בקבוצה שלנו, וכך ש $\{v_{i_1},\dots,v_{i_l},v_{i_{l+1}}\}$ בת"ל. וזו תת-קבוצה של C שגודלה $l+1$.]

ישנן הוכחות נוספות, למשל:

הוכחה שניה (בקצרה): מתחילים עם הקבוצה C שפורשת. אם היא בת"ל – ניקח $B=C$. אחרת, קיים $v_{i_1}\in C$ שניתן להצגה כצירוף לינארי של קודמיו (אפשר מההרצאה). קל להוכיח שגם $C\setminus\{v_{i_1}\}$ פורשת. אם היא בת"ל, ניקח אותה בתור B. אחרת, יש $v_{i_2}\in C\setminus\{v_{i_1}\}$ שניתן להביעו כצירוף לינארי של שאר הוקטורים ב $C\setminus\{v_{i_1}\}$ ולכן כמו קודם $C\setminus\{v_{i_1},v_{i_2}\}$ פורשת. ממשיכים כך עד ש $C\setminus\{v_{i_1},\dots,v_{i_l}\}$ בת"ל. זה חייב לקרות לאחר לכל היותר k צעדים, כיון שלאחר k צעדים מקבלים את הקבוצה הריקה, שהיא בת"ל.

ג. ניקח $V=\mathbb{R}^2$, $C=\{(1,0),(0,1),(0,2)\}$. C פורשת כי היא מכילה את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$.

הקבוצה $B_1=\{(1,0),(0,1)\}\subseteq C$ היא בסיס ל $\mathbb{R}^2$ (היא הבסיס הסטנדרטי שלו).

הקבוצה $B_2=\{(1,0),(0,2)\}\subseteq C$, השונה מ B_1 (למשל כי $(0,2)\in B_2\setminus B_1$), אף היא בסיס ל $\mathbb{R}^2$, כי היא מתקבלת מ B_1 על ידי כפל אחד הוקטורים מ B_1 בסקלר שונה מאפס.

[יש עוד דרכים רבות להראות ש B_2 בסיס. דרך אחת היא לשים את וקטורי B_2 בשורות מטריצה ולהראות שהצורה הקנונית של המטריצה היא מטריצת היחידה. דרך אחרת היא להראות שאיברי B_2 בת"ל ישירות לפי הגדרת תלות לינארית, ולהשתמש בעובדה שהמימד של $\mathbb{R}^2$ הוא 2. ועוד ועוד ...]

שאלה 2. א. ($\Leftarrow$) אם למערכת הלא הומוגנית קיים פיתרון, אז לפי משפט, מספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית שווה למספר הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית (משפט זה הוא תוצאה מיידית מהעובדה שכל פיתרון של המערכת הלא הומוגנית הוא במקרה זה סכום של פיתרון ספציפי של המערכת הלא הומוגנית ופיתרון כללי של המערכת ההומוגנית). נתון שמספר הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית הוא 1, לכן מספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית הוא 1.

($\Rightarrow$) אם למערכת ההומוגנית יש פיתרון יחיד, אזי לפי משפט A הפיכה ולכן למערכת הלא הומוגנית $A\vec{x}=\vec{b}$ יש פיתרון יחיד (והוא $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$).

ב. ($\Leftarrow$) נתון שלמערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ יש פיתרון יחיד. לפי (א), למערכת $A\vec{x}=\vec{0}$ יש פיתרון יחיד ולכן לפי משפט, A הפיכה. לכן A^t הפיכה ולכן A^tA הפיכה (מכפלת מטריצות הפיכות היא הפיכה). לכן למערכת $A^tA\vec{x}=\vec{b}$ יש פיתרון יחיד.

($\Rightarrow$) נתון שלמערכת $A^tA\vec{x}=\vec{b}$ יש פיתרון יחיד, ולכן לפי (א) גם למערכת $A^tA\vec{x}=\vec{0}$ יש פיתרון יחיד. לכן לפי משפט, A^tA הפיכה ולכן A וגם A^t הפיכות (מכפלת מטריצות היא הפיכה אם ורק אם כל המטריצות במכפלה הפיכות). בפרט, A הפיכה ולכן למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ יש פיתרון יחיד (והוא $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ כנ"ל).

חלק ב: שאלות רב-ברירה (מתאים לשאלון 1002 המופיע באתר שלי)

מספר שאלה:	8 7 6 5 4 3 2 1
תשובה נכונה:	3 4 2 4 1 2 3 4

הסבר הפתרונות.

1. אם $B\vec{x}_0=\vec{0}$ אז $AB\vec{x}_0=A\vec{0}=\vec{0}$ (בלי קשר להפיכות של A). מאידך, אם A הפיכה ו $AB\vec{x}_0=\vec{0}$, נכפיל את שני האגפים ב A^{-1} לקבל $A^{-1}AB\vec{x}_0=A^{-1}\vec{0}$ ולכן $B\vec{x}_0=\vec{0}$.

2. נהפוך את A (לשם נוחיות, לא נציין את ה"קו" מעל איברי $\mathbb{Z}_5$):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{(4^{-1}=4)}{\xrightarrow{4R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1-R_3 \\ R_2-2R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_3 \leftrightarrow R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

לכן $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ וסכום אברי האלכסון הוא 4.

3. נפתור את המערכת מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & | & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-2R_2 \\ R_3-3R_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 2 & | & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \underset{(6^{-1}=6)}{\overset{6R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 & | & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \overset{R_3-5R_1}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 & | & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

במטריצה המדורגת יש שתי שורות שאינן אפס, ומספר הנעלמים הוא 4, לכן יש $4-2=2$ דרגות חופש, כלומר בפיתרון הכללי יהיו שני פרמטרים $s,t\in\mathbb{Z}_7$. לכל פרמטר יש 7 אפשרויות ולכן בסך הכל יש $7\cdot7=49$ פתרונות.

4. לפי משפט המימדים,

$$(n-1)+(n-1)-\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=\dim(U+W)\leq\dim V=n,$$

לכן $\dim(U\cap W)\geq n-2\geq 3-2=1$ ולכן $U\cap W\neq\{\vec{0}\}$.

5. המספר $z=3-3i$ יוצר זוית של -45° ביחס לציר x. לפי דמואבר, הזוית של z^4 היא $180^\circ=-180^\circ=-45^\circ\cdot4$ ביחס לציר x, ולכן (שוב לפי דמואבר) הזוית של $z^{4k}=(z^4)^k$ היא כפולה של 180° ולכן המספר ממשי, כלומר $\mathrm{Im}(z^{4k})=0$.

6. נשים את הוקטורים בשורות מטריצה, ונביא ב $\mathbb{Z}_{11}$ לצורה המדורגת קנונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-4R_1 \\ R_3-7R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \overset{\substack{7R_2 \\ 9R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-2R_2 \\ R_3-R_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $\{(1,0,10),(0,1,2)\}$ בסיס עבור המרחב הנפרש על ידי וקטורי השורה שהתחלנו מהם.

7. $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \overset{\text{חישוב}}{=} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ולכן סכום אברי המטריצה הוא $\frac{1}{9}(-2+4+1)\cdot3=1$.

8. $\mathrm{rank}(A^2)<\mathrm{rank}(A)\leq n$, לכן A^2 אינה הפיכה, ולכן A אינה הפיכה. [לפי האספס: AB הפיכה $\Leftrightarrow$ A וגם B הפיכות.]