שאלון סגור

מספר סידורי: 1002
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 1

סמסטר א׳ ה׳תשס״ב (מועד א׳)
יום שני, כ״ט שבט ה׳תשס״ב (11.2.02 למ׳)

מספר קורס: 88-112-01/04/07/11/16.
מרצים: מיכאל כץ, רון עדין, שלום פייגלשטוק, בועז צבאן ואנדרי רזניקוב.
מתרגלים: אושרית אברוצקי, חגי אהרונוביץ, ודים אוסטפנקו, גיל בן־ארצי, דבורה כהן ולודה מרקוס.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א׳ מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב׳ הוא רב־ברירתי (״אמריקאי״). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (לא תינתן הארכה).

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:
א.

$$\begin{aligned} F^{n\times 1} &= F^n \\ F^{m\times n} &= M_{m,n}(F) = M_{m\times n}(F) \\ r(A) &= \operatorname{rank}(A) \end{aligned}$$

ב. אברי השדה $\mathbb{Z}_p$ יסומנו: $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}$.

חלק א: שאלות פתוחות (44 נקודות)

ענה על השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב׳.

שאלה 1. א. (5 נקודות) הגדר את המינוחים הבאים:

1. קבוצה פורשת (מרחב וקטורי).
2. בסיס (של מרחב וקטורי).

ב. (12 נקודות) תהי $C = \{v_1, \ldots, v_k\}$ קבוצה פורשת במרחב וקטורי V. הוכח שקיימת תת־קבוצה $B \subseteq C$ כך ש B בסיס ל V.

ג. (5 נקודות) תן דוגמא של קבוצה C כנ״ל שעבורה B הנ״ל *אינה* יחידה (אפשר להניח $V = \mathbb{R}^2$).

שאלה 2. יהיו $A \in F^{n\times n}$ ו $\vec{b} \in F^{n\times 1}$ נתונים. הוכח:

א. (11 נקודות) למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ יש פיתרון יחיד אם ורק אם למערכת $A\vec{x} = \vec{0}$ יש פיתרון יחיד.

ב. (11 נקודות) למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ יש פיתרון יחיד אם ורק אם למערכת $A^tA\vec{x} = \vec{b}$ יש פיתרון יחיד.

חלק ב: שאלות רב־ברירתיות (56 נקודות: 7 נקודות לכל תשובה נכונה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה (חובה לענות על כל השאלות). סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהי F שדה, יהיו $A, B \in F^{n\times n}$, ויהי $\vec{0} \neq \vec{x}_0 \in F^n$. אזי בהכרח:

1. אם A היא הפיכה, אז $\vec{x}_0$ הוא פיתרון של המערכת $B\vec{x} = \vec{0}$ אם ורק אם $\vec{x}_0$ הוא פיתרון של המערכת $BA\vec{x} = \vec{0}$.
2. אם $\vec{x}_0$ הוא פיתרון של המערכת $A^2\vec{x} = \vec{0}$, אז $\vec{x}_0$ הוא פיתרון של המערכת $A\vec{x} = \vec{0}$.
3. ייתכן ש $\vec{x}_0$ הוא פיתרון של המערכת $AB\vec{x} = \vec{0}$, ובכל זאת למערכת $BA\vec{x} = \vec{0}$ יש רק פיתרון טריויאלי.
4. אם A היא הפיכה, אז $\vec{x}_0$ הוא פיתרון של המערכת $B\vec{x} = \vec{0}$ אם ורק אם $\vec{x}_0$ הוא פיתרון של המערכת $AB\vec{x} = \vec{0}$.

שאלה 2. תהא

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}.$$

סכום אברי האלכסון של המטריצה A^{-1} הוא :

1. $\bar{2}$.
2. $\bar{3}$.
3. $\bar{4}$.
4. $\bar{1}$.

שאלה 3. נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x_1 + x_2 + x_3 + \bar{4}x_4 &= \bar{4} \\ x_1 + x_2 + \bar{6}x_3 + x_4 &= \bar{3} \\ \bar{3}x_1 + x_2 + \bar{3}x_3 &= \bar{5} \end{aligned}$$

מספר הפתרונות של המערכת הוא :

1. למערכת אין פתרון.
2. 49.
3. אינסוף.
4. 7.

שאלה 4. יהי V מרחב וקטורי עם $\dim(V) = n \geq 1$, ויהיו U ו W תת־מרחבים של V כך ש $\dim(U) = \dim(W) = n-1$. אזי בהכרח :

1. אם $n \geq 3$, אז $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם $n = 2$, אז $V = U \oplus W$.
4. אם $n \geq 3$ אז $U + W = V$.

שאלה 5. יהי $z = 3 - 3i$. אזי:

1. $\mathrm{Im}(z^{3k}) \neq 0$ לכל מספר טבעי k.
2. $\mathrm{Re}(z^{2k}) = 0$ לכל מספר טבעי k.
3. $\mathrm{Re}(z^{5k}) \neq 0$ לכל מספר טבעי k.
4. $\mathrm{Im}(z^{4k}) = 0$ לכל מספר טבעי k.

שאלה 6. יהיו $v_1 = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3})$, $v_2 = (\bar{4}, \bar{5}, \bar{6})$, $v_3 = (\bar{7}, \bar{8}, \bar{9})$ וקטורים ב $\mathbb{Z}_{11}^3$, ויהי $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. בסיס עבור V הוא:

1. $\{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{5}, \bar{7})\}$.
2. $\{(\bar{1}, \bar{0}, \overline{10}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2})\}$
3. $\{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}), (\bar{1}, \overline{10}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{8}, \bar{5})\}$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 7. נתונים הבסיסים הבאים עבור $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} B &= \{(0,2,1), (1,0,2), (2,1,0)\} \\ C &= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \end{aligned}$$

תהא P מטריצת המעבר בין הבסיסים, כך שלכל $v \in \mathbb{R}^3$, $P[v]_C = [v]_B$. אזי סכום כל אברי המטריצה P הוא:

1. 9
2. 0
3. $\frac{4}{9}$
4. 1

שאלה 8. יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אזי בהכרח:

1. אם A אינה הפיכה, אז $\mathrm{rank}(A^2) < \mathrm{rank}(A)$.
2. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
3. אם $\mathrm{rank}(A^2) < \mathrm{rank}(A)$, אזי A אינה הפיכה.
4. אם $\mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}(A)$, אז A הפיכה.

בהצלחה!