פתרון הבחינה באלגברה לינארית 1, תשס"א מועד א'/בועז צבאן, ינואר 2002 למי

פתרון השאלה הפתוחה.

א. נוכיח ש H מקיימת את תנאי הקריטריון המקוצר לתת-מרחב:

1. מהנתון, $H \subseteq F^n$.
2. מתקיים $A\vec{0}=\vec{0}$, לכן $\vec{0} \in H$.
3. יהיו $u,v \in H$, כלומר $Au=\vec{0}$ וכן $Av=\vec{0}$. אזי $A(u+v)=Au+Av=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$ ולכן $u+v \in H$.
4. יהיו $v \in H$ (כלומר $Av=\vec{0}$) ו $\alpha \in F$. אזי $A(\alpha v)=\alpha Av=\alpha\vec{0}=\vec{0}$, לכן $\alpha v \in H$.

ב. מספיק להראות ש $\vec{0} \notin N$, כאשר $\vec{0}$ הוא וקטור האפס ב F^n. ואכן לפי הנתון בשאלה, $A\vec{0}=\vec{0}\neq\vec{b}$.

ג. כדי להראות ש $N=v_0+H$, יש להראות ש $N \subseteq v_0+H$ וכן $N \supseteq v_0+H$.

$\underline{N \supseteq v_0+H}$: יהי $v \in v_0+H$, כלומר יש $h \in H$ (דהיינו $Ah=\vec{0}$) כך ש $v=v_0+h$. נראה ש $v \in N$: $Av=A(v_0+h)=Av_0+Ah=\vec{b}+\vec{0}$, כיון שנתון ש $v_0 \in N$ (דהיינו $Av_0=\vec{b}$).

$\underline{N \subseteq v_0+H}$: $v_0 \in N$, כלומר $Av_0=\vec{b}$. יהי $v \in N$, אזי $Av=\vec{b}$. יש להראות ש $v \in v_0+H$. מתקיים $A(v-v_0)=Av-Av_0=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$, לכן $v-v_0 \in H$. לכן, $v=v_0+(v-v_0) \in v_0+H$.

קלי קלות.

פתרון חלק ב (שאלות רב-ברירה) – מתאים לשאלון 1001 המופיע באתר שלי

מספר שאלה:	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
תשובה נכונה:	1 2 1 4 4 3 3 2 1 1

אם לא טעיתי ...

הסבר הפתרונות.

1. שמים את הוקטורים בשורות מטריצה ומדרגים. נשארים שני וקטורים. וקטורים אלו מהוים בסיס למרחב הנפרש. לכן המימד הוא 2.

2. דרגת השורות של מטריצה עם 6 שורות אינה יכולה להיות גדולה מ 6. כיון שבכל מטריצה דרגת השורות שווה לדרגת העמודות, דרגת העמודות של המטריצה שלנו היא לכל היותר 6, כלומר יש 6 (או פחות) עמודות שפורשות את מרחב העמודות ובפרט את העמודות האחרות.

3. מספר זה מקיים $\bar{z}=-z$:

$$\bar{z}=\overline{(\sqrt{3}+i)^7-(\sqrt{3}-i)^7}=\overline{(\sqrt{3}+i)^7}-\overline{(\sqrt{3}-i)^7}=\overline{(\sqrt{3}+i)}^7-\overline{(\sqrt{3}-i)}^7=(\sqrt{3}-i)^7-(\sqrt{3}+i)^7=-z \ .$$

לכן z מדומה טהור.

4. $A \cdot A^3=A^4=A^2A^2=(-I)(-I)=I$, לכן A הפיכה, ומתקיים $A^3=A^{-1}$.

5. פותרים את המערכת עם הפרמטר, ורואים שיש ערכים של a כך שלמערכת יש אינסוף פתרונות. אפשרות אחרת היא לפתור עבור $a=-1$ ולראות שיש אינסוף פתרונות, לפתור עבור $a=3$ ולראות שיש פתרון יחיד, ולפתור עבור $a=-2$ ולראות שאין למערכת פתרון. זה שולל את שאר התשובות.

כיון שסטודנטים רבים מתלוננים שיש טעות בשאלה, אכתוב כאן פיתרון מלא:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & a-1 & | & -8 \\ 2 & a-1 & -3 & | & -2 \\ 2 & -2 & a & | & -6 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-R_3 \\ 3R_3-2R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -3 & a-1 & | & -8 \\ 0 & a+1 & -3-a & | & 4 \\ 0 & 0 & a+2 & | & -2 \end{pmatrix}$$

לכן: עבור $a=-2$ אין למערכת פיתרון (סתירה בשורה שלישית), וכאשר $a\neq -1,-2$ יש למערכת פיתרון יחיד (כי המטריצה משולשית ואיברי האלכסון שלה שונים מאפס). עבור $a=-1$ מקבלים שהשורה השניה שווה לפעמיים השורה השלישית, ומקבלים שיש אינסוף פתרונות.

6. עם הגדרה כזאת של כפל יש מחלקי אפס: $(1,0)\cdot(0,1)=(1\cdot 0,0\cdot 1)=(0,0)$, למרות ש $(1,0)$ ו $(0,1)$ שונים מאפס. לכן זה לא שדה.

7. טענה זאת נכונה. מספיק להראות שאם $\emptyset\neq W\subseteq V$ מקיימת את האמור בטענה, אז היא מקיימת את דרישות הקריטריון המקוצר. הסגירות לכפל בסקלר נתונה, לכן נותר להראות שלכל $u,w\in W$ מתקיים $u+w\in W$. נראה זאת: $w\in W$, לכן מהנתון גם $-w=(-1)w\in W$, לכן (שוב מהנתון) $u+w=u-(-w)\in W$.

8. אם $A\vec{x}=\vec{b}$ מערכת כלשהי, ו $\vec{c},\vec{d},\vec{c}+\vec{d}$ פתרונות שלה, אז $A\vec{c}=\vec{b}, A\vec{d}=\vec{b}, A(\vec{c}+\vec{d})=\vec{b}$. אבל $\vec{b}=A(\vec{c}+\vec{d})=A\vec{c}+A\vec{d}=\vec{b}+\vec{b}=2\vec{b}$, לכן $\vec{b}=2\vec{b}$ ולכן $\vec{b}=\vec{0}$, כלומר המערכת היא הומוגנית.

9. $U_1+U_2=U_1+U_3$, לכן $\dim(U_1+U_2)=\dim(U_1+U_3)$. כיון ש $\dim U_2<\dim U_3$, לפי משפט המימדים,

$$\dim(U_1\cap U_2) = \dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1+U_3) <$$
$$< \dim U_1+\dim U_3-\dim(U_1+U_3) = \dim(U_1\cap U_3).$$

10. $A^{-1}=\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. החריפים שביניכם יבחינו שאין צורך להפוך את A "עד הסוף" כדי לענות על השאלה: מתחילים עם המטריצה $(A|I)$, ומנסים להגיע למטריצה שבה אחת השורות מתחילה ב $(0,1,0)$. המשך השורה הזאת הוא השורה השניה של A^{-1} ולכן אין צורך להמשיך לדרג.