שאלון סגור

מספר סידורי: 1001
מספר מחברת:

מבחן באלגברה לינארית 1

סמסטר א' ה'תשס"א (מועד ב')
יום שני, י"ט שבט ה'תשס"א (12.2.01 למ')

מספר קורס: 88-112-01/07/14/18.
מרצים: צבי ארד, רון עדין, שלום פייגלשטוק ובועז צבאן.
מתרגלים: אושרית אברוצקי, חגי אהרונוביץ, ניר אלקיים, הראל בדיחי ולודה מרקוס.
חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר, ***גם לא במחשבון***.
הנחיות:
א. יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
ב. המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלה פתוחה, עליה יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב־ברירתי ("אמריקאי"). לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
ג. יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (טפסי הבחינה ממוספרים).
ד. שימו לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.
משך הבחינה: שעתיים וחצי.

הגדרות

הסימונים הבאים (בקבוצות הרצאה שונות) שקולים זה לזה:

$$\begin{aligned} F^{n\times 1} &= F^n \\ F^{m\times n} &= F_{m\times n} = M_{m\times n}(F) \end{aligned}$$

חלק א: שאלה פתוחה (20 נקודות)

ענה על השאלה הבאה. את התשובה/הוכחה עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטיוטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. תהא נתונה מערכת משוואות לא הומוגנית $A\vec{x}=\vec{b}$ מעל שדה F עם מטריצת מקדמים $A\in F^{m\times n}$ ווקטור $\vec{0}\neq\vec{b}\in F^m$. נסמן:

$$\begin{aligned} N &= \{\vec{x}\in F^n : A\vec{x}=\vec{b}\} \\ H &= \{\vec{x}\in F^n : A\vec{x}=\vec{0}\} \end{aligned}$$

הוכח את הטענות הבאות:
א. (5 נקודות) H תת־מרחב של F^n.
ב. (5 נקודות) הקבוצה N אינה תת־מרחב של F^n.
ג. (10 נקודות) יהא $v_0\in N$ פתרון קבוע כלשהו, ונסמן $v_0+H=\{v_0+h : h\in H\}$. אזי $N=v_0+H$.

חלק ב: שאלות רב–ברירתיות (80 נקודות: 8 נקודות לכל שאלה)

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. המימד של $\text{span}\{(\bar{1},\bar{2},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1})\}$ במרחב $(\mathbb{Z}_3)^3$ מעל $\mathbb{Z}_3$ הוא :

1. 2.
2. 0.
3. 1.
4. 3.

שאלה 2. למטריצה בעלת 6 שורות ו 9 עמודות יש תמיד :

1. 3 עמודות כך שכל אחת מהן היא צירוף לינארי של 6 העמודות האחרות.
2. 4 עמודות כך שכל אחת מהן היא צירוף לינארי של 5 העמודות האחרות.
3. שורה אחת שהיא צירוף לינארי של 5 השורות האחרות.
4. 2 שורות המהוות קבוצה תלויה לינארית.

שאלה 3. המספר $z=(\sqrt{3}+i)^7-(\sqrt{3}-i)^7\in\mathbb{C}$ הוא :

1. מספר ממשי שלילי.
2. מספר מדומה טהור (כלומר מהצורה ai כאשר a ממשי).
3. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
4. מספר ממשי חיובי.

שאלה 4. תהא A מטריצה ריבועית מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$, המקיימת $A^2=-I$ (I היא מטריצת היחידה). אזי :

1. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
2. A הפיכה, והמטריצה ההופכית לה היא $I-A$.
3. A הפיכה, והמטריצה ההופכית לה היא A^3.
4. A לא בהכרח הפיכה.

שאלה 5. נתונה מערכת המשוואות הבאה (עם פרמטר a) מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + (a-1)x_3 &= -8 \\ 2x_1 + (a-1)x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + ax_3 &= -6 \end{aligned}$$

אזי :

1. עבור $a=-1$ יש למערכת פתרון יחיד.
2. עבור $a=3$ אין למערכת פתרון.
3. יש ערכים של a כך שלמערכת יש אינסוף פתרונות.
4. עבור $a=-2$ יש למערכת פתרון.

שאלה 6. נגדיר על $\mathbb{R}^2$ חיבור וכפל בצורה הבאה :

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d) \\ (a,b)\cdot(c,d) &= (a\cdot c, b\cdot d) \end{aligned}$$

אזי :

1. אם נגדיר את החיבור בצורה שונה, נקבל שדה.
2. בהגדרות אלו מתקיים :
$(a,b)\cdot(c,d)=(0,0)$ אם ורק אם $(a,b)=(0,0)$ או $(c,d)=(0,0)$.
3. $\mathbb{R}^2$ מהווה שדה ביחס לפעולות אלה.
4. $\mathbb{R}^2$ אינו מהווה שדה ביחס לפעולות אלה.

שאלה 7. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהא W תת־קבוצה לא ריקה של V. נתבונן בטענה הבאה :

W הוא תת־מרחב של V אם, ורק אם, מתקיימות התכונות הבאות :
א. לכל $u,w\in W$ מתקיים $u-w\in W$.
ב. לכל $w\in W$ ולכל $\alpha\in F$ מתקיים $\alpha w\in W$.

1. טענה זאת לעולם אינה נכונה.
2. הטענה נכונה רק אם $F=\mathbb{R}$.
3. הטענה נכונה רק אם F שדה סופי.
4. טענה זאת נכונה תמיד.

שאלה 8. נתונה מערכת של m משוואות ב n נעלמים מעל $\mathbb{R}$. נניח שהוקטורים $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, וכן $(d_1 + c_1, d_2 + c_2, \dots, d_n + c_n)$ הם פתרונות של המערכת. אזי:

1. המערכת היא הומוגנית.
2. מספר הנעלמים במערכת הוא אחד.
3. במערכת יש משוואה אחת בלבד.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה בהכרח נכונה.

שאלה 9. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה F. יהיו U_1, U_2, U_3 תת־מרחבים של V, כך שמתקיים $\dim(U_2) < \dim(U_3)$, וכן $U_1 + U_2 = U_1 + U_3$. אזי:

1. $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_3)$.
2. $\dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1 \cap U_3)$.
3. $\dim(U_1 \cap U_2) > \dim(U_1 \cap U_3)$.
4. $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1 \cap U_3)$.

שאלה 10. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

מטריצה מעל $\mathbb{R}$. סכום האיברים בשורה השניה של המטריצה ההופכית A^{-1} הוא:

1. -3.
2. 2.
3. -2.
4. 1.

בהצלחה!