ערכים מדוייקים של π במקורות היהדות

בועז צבאן ודוד גרבר
המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב
אוניברסיטת בר-אילן

במקורות העתיקים של היהדות מופיעה המתמטיקה לא כענף מדעי תיאורטי "תלוש מהמציאות", אלא ככלי שימושי הנוגע לבעיות הלכתיות יום יומיות. במקומות מסויימים, הסקרנות האינטלקטואלית והאופקים הרחבים של חכמי ישראל גרמו להם להרחיב את הדיונים אל מעבר לבעיה הקונקרטית, וכפי שנראה להלן, אם ניגשים אל הטקסטים בצורה פתוחה ובלתי מגמתית, אפשר למצוא טענות ותוצאות מעניינות במיוחד.

במאמר זה נתמקד בסוגיה הגאומטרית של היחס שבין היקף העיגול לקוטרו. משחר ימיה של המתמטיקה, היתה שאלת היחס בין היקף העיגול לקוטרו (המסומן כיום באות היוונית π, וערכו ...3.141592) אחת השאלות המרתקות ביותר, והעסיקה מדענים ואנשי מעשה. שרידים מנסיונות חוזרים ונשנים להתמודד עם השאלה אנו מוצאים לא רק בספרות המתמטיקה היוונית, אלא גם בספרות העתיקה של ההודים, הסינים, הבבלים והיהודים.

הקירוב ל π נדון בתלמוד הבבלי (עירובין י"ד:א). במשנה שם מובא הכלל "כל שיש בהיקפו שלושה טפחים, יש בו רוחב טפח"; ומכאן שהיחס בין היקף עיגול לקוטרו הוא 3. דעתם של חכמי התלמוד אינה נוחה ממשנה זו, ולכן מתפתח דיון שלא נפרטו כאן. רבי יוחנן (גדול אמוראי ארץ ישראל בדור השני של האמוראים, המאה הג' לספירה המקובלת) מפנה אותנו לפסוק בתנ"ך ממנו נלמד הכלל (מלכים א', ז' כ"ג). הפסוק מתאר מיכל מים גדול הקרוי "ים", שעשה המלך שלמה בבית המקדש הראשון:

כג וַיַּעַשׂ אֶת־
הַיָּם מוּצָק עֶשֶׂר בָּאַמָּה מִשְּׂפָתוֹ עַד־שְׂפָתוֹ עָגֹל ׀ סָבִיב וְחָמֵשׁ
בָּאַמָּה קוֹמָתוֹ וקוה שְׁלֹשִׁים בָּאַמָּה יָסֹב אֹתוֹ סָבִיב׃ וְקָו

רבים תמהו על הנוסח המסורבל לכאורה של הפסוק, ובמיוחד משכה את תשומת לִבם ה"ה" היתרה במלה "קו" (כתיב "קוה" וקרי "קו"). מהו המידע הנוסף שמנסה כותב הפסוק למסור לנו? כיוון שמדובר בקירוב ל π, יש להניח, כי מסתתר כאן קירוב "טוב יותר" מ 3, וכיוון שהערכת שגיאות מתבצעת תמיד על ידי פרופורציות, נוכל לשחזר קירוב מדויק יותר ל π מתוך הכתוב. הדבר מתבצע בצורה הבאה: נסמן ב- π_{HEBREW} את הערך המדויק יותר ל π וב π_0 את הערך 3 הנמסר לנו בפשט הפסוק, אזי:

$$\frac{\pi_{HEBREW}}{\pi_0} = \frac{\text{קוה}}{\text{קו}} = \frac{111}{106} \Rightarrow \pi_{HEBREW} = 3 \times \frac{111}{106} = \mathbf{3.1415}09...$$

והרי לנו קירוב נפלא (כאמור לעיל, הערך המדויק של π הוא **3.14159**2...)! רעיון זה היה נראה "מאולץ" אלמלא קיבלנו קירוב טוב כל כך. יש להוסיף, שהשימוש בגימטריה לציין מידות אורך לא היה ייחודי למקורותינו: המלך סרגון השני (סוף המאה השמינית לפני הספירה המקובלת, מעט לפני זמן כתיבת ספר מלכים שבו מופיע הפסוק הנ"ל), פיאר את שמו בכך שבנה חומה שאורכה שווה לגימטריה של שמו. (למקור הרעיון וסימוכין מדרשיים לענין זה, ראה מקור [2].)

בין אם נקבל רעיון זה ובין אם לאו, ברור שהיתה לחכמי התלמוד, ובפרט לרבי יוחנן (שחי במאה השלישית למי), האפשרות להשתמש בערכים מדויקים יותר עבור π. למרות זאת, בכל הסוגיות התלמודיות מוזכר הקירוב 3. בהמשך נתאר שלוש דרכים שהציעו חכמינו להסביר את התופעה.

א. הגישה הרציונליסטית

לפי גישה זאת, לפחות לענייננו אין מושג של אמת *חלקית*. בנוגע לשאלת ערכו של π, כל תשובה למעט הערך *המדוייק* של π אינה נכונה. כיון שלא ניתן לבטא את הערך המדוייק של π כמנה של מספרים שלמים, מבחינת האמת *המוחלטת* אין טעם להתאמץ ולקרב את הערך יותר ויותר. גישה כזאת מבוטאת בצורה ברורה על ידי רמב"ם (המאה הי"ב) בפירושו למשנה (עירובין א:ה):

> יש לך לדעת כי ייחוס אלכסון העגולה אל המסבב אותה בלי ידוע, *ואי אפשר לדבר בו לעולם באמת*, וחסרון זו ההשגה *אינה מאיתנו* ... אבל הוא בטבעי זה הדבר בלי ידוע *ואין במציאותו שיושג*. אבל ידוע זה בקרוב ... אשר עליו סומכים חכמי המידות הלימודיות הוא יחוס האחד לשלושה ושביעית וכל עגולה שיהיה באלכסון שלה אמה יהיה בהיקפה שלוש אמות ושביעית בקירוב, ולפי שזה *לא יושג לעולם אלא בקירוב*, לקחו הם בחשבון הגדול ואמרו "כל שיש בהיקפו שלושה טפחים יש בו רוחב טפח", וסמכו על זה במה שהוצרכו אליו מן המדידה בתורה.

(ההדגשות שלנו).

גישה זאת מקדימה את זמנה בכשש מאות שנים(!), כיון שהעובדה שהמספר π אינו רציונאלי הוכחה על ידי המתמטיקאי למברט רק במאה הי"ח לספירה המקובלת. יש לציין ש"חשדות" שהמספר הנדון אינו רציונאלי היו קיימים גם בקרב מתמטיקאים מוסלמים בני תקופתו של רמב"ם, כגון אל-בירוני, אולם אף אחד מהם לא מביע דעה נחרצת כל כך בנדון.

ב. הגישה המיסטית-מודרנית

לפי תיאוריות פיסיקליות מודרניות, כגון תורת היחסות, תורת הקוואנטים, או תורת ה"על מיתרים", המודל הגיאומטרי הקלאסי, שעל פיו נקבע ערכו המספרי של π, אינו מתאר את המציאות בצורה מדוייקת. ניתן למצוא תופעות מוזרות לפיהן, ליד אנרגיות או מסות גבוהות, או במהירויות גבוהות, המרחב הגאומטרי "מתעקם" בצורה משמעותית, ובפרט ה"קבועים" הגאומטרים משתנים.

באופן אנלוגי, מקורותינו מספרים לנו על "ניסים גאומטריים" שהתרחשו בתחום בית המקדש. למשל, במשנה (אבות ה:ה) מצויין כי המתפללים בבית המקדש עמדו בצפיפות גדולה, אולם כאשר השתחוו נוצר רווח ביניהם. בתלמוד הבבלי (מגילה י:ב) מביא רבי לוי מסורת מאבותיו, לפיה ארון הקודש אינו תופס מקום כלל בקודש הקודשים של בית המקדש. ההבדל בין התיאורים האלו לתופעות המתוארות בפיסקה הקודמת הוא, שכאן לא מדובר על אנרגיה/מסה/מהירות גבוהה, אלא על קדושה "בריכוז גבוה".

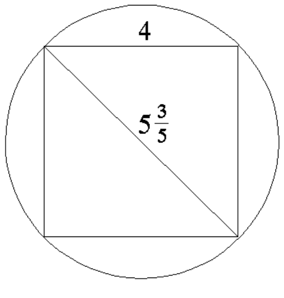
לפי זה, היה מי שהציע (מונק, 1962 למי) כי תיאור הים שעשה שלמה בפסוק הנ"ל מספר מלכים בא ללמדנו שאכן היחס בין ההיקף לקוטר במקום שבו נמצא הים היה 3, כלומר הגאומטריה היתה שונה משמעותית מהגאומטריה הקלאסית, ולפיכך יש להשתמש בערך זה לצרכים הלכתיים. כדי לפתור את הסתירה של ערך זה עם המציאות היום-יומית שלנו, יש למדוד לפי זה את היקף *המשושה החסום במעגל*, ולא את היקף המעגל עצמו (היקף משושה החסום במעגל גדול בדיוק פי שלשה מקוטר המעגל).

ב. הגישה הפדגוגית

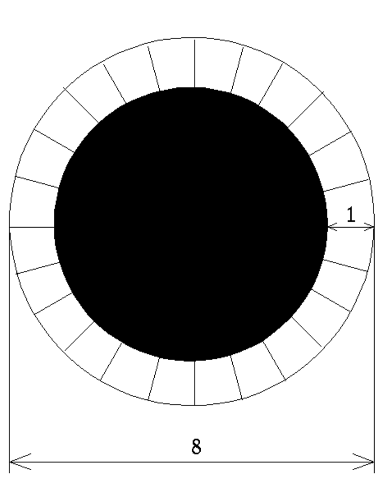
הגישה הפדגוגית מעניינת לא רק בכך שהיא עונה על השאלות שהעלינו, אלא שבנוסף היא מגלה לנו אינפורמציה שלא נראית על פני השטח. רבי שמעון בן צמח דוראן (ספרד 1361 - אלג'יר 1444)

בספר התשב"ץ (תשובות שמעון בן צמח, א:קס"ה), מעניק לנו את ההסבר הבא: החכמים ידעו ערכים יותר מדויקים, אולם כדי להקל על תלמידיהם את הלימוד, השתמשו בערכים מקורבים, לקיים "לעולם ישנה אדם לתלמידו בדרך הקצרה" (תלמוד בבלי, פסחים ג:ב; ס"ג:ב), כלומר כאשר מלמדים את התלמידים המתחילים, מעדיפים את בהירות ההסבר על פני דיוק החישובים. על כל פנים, כאשר בא הדבר לידי מעשה, **מבצעים החכמים את החישובים עם הערכים המדויקים**.

כדי להדגים עיקרון זה, נפנה לסוגיית "סוכה עגולה" (תלמוד בבלי, סוכה ז:ב - ח:ב, ועיין במקור [1]). רבי יוחנן, בהסתמך על הכלל שסוכה ריבועית כשרה צריכה להיות בגודל 4x4 אמות, אומר: "סוכה עגולה, אם יש בהיקפה כדי לישב בה כ"ד בני אדם - כשרה, ואם לאו - פסולה". הגמרא מוצאת את היקף הסוכה העגולה החוסמת סוכה ריבועית בגודל 4x4 אמות (ראה ציור 1). כיון שאורך אלכסונו של ריבוע גדול פי $1\frac{2}{5}$ בקירוב (הערך המדוייק הוא $\sqrt{2}$) מצלע הריבוע, יוצא שאורך האלכסון הוא $1\frac{2}{5}\cdot 4 = 5\frac{3}{5}$. השלב הבא בחישוב הוא מציאת היקף העיגול בעל קוטר זה. לאור הכלל הנזכר לעיל לגבי היחס שבין היקף עיגול לקוטרו, ההיקף הוא: $\pi_0 \cdot 5\frac{3}{5} = 3\cdot 5\frac{3}{5} = 16\frac{4}{5}$. שיעור זה עדיין רחוק מאד מהשיעור שנקט רבי יוחנן, ולכן רב אסי מבאר את דברי רבי יוחנן: 24 האנשים יושבים **מחוץ** לסוכה, בצורה המתוארת בציור 2, כאשר כל מקטע מציין את מקום מושבו של אדם אחד (מובן שהם יושבים שם לצורכי מדידה בלבד, שכן הסוכה הכשרה עצמה היא העיגול המרכזי המושחר). לפי הכלל "גברא באמתא יתיב" (=מקום מושבו של אדם הוא אמה), ההיקף החיצוני הוא 24 אמות. מכאן, שקוטר המעגל החיצוני הוא $\frac{24}{\pi_0} = 8$ (על פי הכלל שהשתמשנו בו קודם, שהיחס בין היקף המעגל לקוטרו הוא $\pi_0 = 3$). כדי לקבל את קוטרו של המעגל הפנימי (המושחר), יש לחסר שתי אמות (אמה מכל צד) שהן מקום מושבם של האנשים, ולכן קוטר המעגל הפנימי הוא 6 אמות. שוב לפי הכלל שהיקף המעגל הוא פי 3 מקוטרו, נקבל כי ההיקף הוא $\pi_0 \cdot 6 = 18$ אמות, שזה קצת יותר מההיקף הדרוש שחושב קודם ($16\frac{4}{5}$).



(1)



(2)

הסבר זה, כפי שהוא כתוב, צורם מאד, משום שאילו דרש רבי יוחנן, ש- 23 אנשים ישבו בצורה הנ"ל (במקום 24 אנשים), היה מתקבל הערך 17 ($(\frac{23}{\pi 0}-2)\pi 0=23-2\pi 0=17$) שהוא הרבה יותר קרוב ל- $16\frac{4}{5}$.

מדוע, אם כן, הקפיד רבי יוחנן לדרוש דווקא 24 אנשים (ופסל ב- 23 אנשים, כלשונו "ואם לאו - פסולה")? מה גם, שרבי יוחנן עצמו הקפיד מאד על דבריו, דבר המתבטא יותר מכל בדרשתו לפסוק (משלי ז:ד) "אמור לחכמה אחותי את": "אם ברור לך הדבר כאחותך שהיא אסורה לך - אמרהו, ואם לאו - אל תאמרהו" (תלמוד בבלי, שבת קמ"ה:ב).

אלא שהפתרון לבעיה זו נמצא בדברי רבי שמעון בן צמח הנ"ל: **רבי יוחנן בחישוביו השתמש בערכים מדויקים יותר**. אם לדוגמא ניקח את הערך $3\frac{1}{7}$ עבור היחס שבין היקף המעגל לקוטרו, נקבל שההיקף של סוכה עגולה כשרה (החוסמת סוכה ריבועית בגודל 4x4 אמות) הוא: $4\cdot 1\frac{2}{5}\cdot 3\frac{1}{7}=17\frac{3}{5}$ (שכן אלכסון הריבוע הוא כמו קודם $1\frac{2}{5}\cdot 4=5\frac{3}{5}$, וכעת כדי לקבל את ההיקף, נשתמש ביחס החדש $3\frac{1}{7}$, לקבל שההיקף הוא $5\frac{3}{5}\cdot 3\frac{1}{7}=17\frac{3}{5}$). אם נשתמש עתה בשיטת רבי יוחנן על פי הבנתו של רב אסי לעיל, נקבל שההיקף שדורש רבי יוחנן הוא $17\frac{5}{7}$, שהוא ערך מאד קרוב.

במאמר אחר (מקור [5]) הראנו, שבאופן מפתיע הקירוב שלמדנו מהפסוק בתחילת המאמר על היחס שבין היקף עיגול לקוטרו נכנס עתה לתמונה: אם נקח את π_{HEBREW}, וערך $1\frac{2}{5}+\frac{1}{100}=1.41$ עבור היחס שבין אלכסון הריבוע לצלעו (שהוא ערך יותר מדויק עבור $\sqrt{2}$), נקבל כי ההפרש בין היקף הסוכה לפי דברי רבי יוחנן לבין ההיקף המחושב ישירות (על ידי חישוב ההיקף של הסוכה החוסמת ריבוע של 4x4 אמות) הינו כ- 0.00113 אמות בלבד! ייתכן כי העובדה הבאה מפתיעה עוד יותר: כאשר ביצענו "היפוך של הבעיה" (היינו, שיוצאים מפתרון הבעיה - שאין הפרש בין ההיקף לפי הסברו של רבי יוחנן להיקף שחושב ישירות, ומחפשים עבור אילו ערכים של היחסים הנ"ל הדבר מתקיים), גילינו שהערכים האופטימליים להסבר דברי רבי יוחנן קרובים מאד לערכים שהצענו כאן.

לסיכום, קשה לקבוע בוודאות, שרבי יוחנן אכן ידע את הערך π_{HEBREW} הנ"ל, אולם נראה ודאי שערכים קרובים ל π היו ידועים לו, והוא אף השתמש בהם בחישוביו. זוהי דוגמא נוספת של מקרים, שכאשר אנו פוגשים דברי חכמים בפעם הראשונה, הם נראים, לכאורה, בלתי מדויקים; אך לאחר עיון נוסף, אנו עומדים משתאים, בראותנו כמה מחושבים ומדויקים הדברים.

מאמרים (של כותבי מאמר זה) לעיון נוסף:

[1] **סוכה עגולה**, מגל י', תשנ"ד, 117-134.
[2] **סוכה עגולה (ב)**, מגל י"א, תשנ"ה, 127-134.
[3] **כוורת**, המעין ל"ה ג', תשנ"ה, 57-69.
[4] **כל שיש בהיקפו**, הגיון ג', תשנ"ו, 103-131.
[5] **On the rabbinical approximation of** π, Historia Mathematica **25** (1998), pp. 75-84.
[6] **A Mechanical derivation of the area of the sphere**, The American Mathematical Monthly, January 2001, pp. 10-15.

את מרבית המאמרים ניתן להשיג באתר האינטרנט למתמטיקה במקורות היהדות:

http://www.cs.biu.ac.il/~tsaban