5 85

לוגיקה 88-200 תשנ"ו סמ' א מועד א ד"ר משה קופל

ענה על כל השאלות במקומות המסומנים בדפי השאלון

הוסף הסברים במחברת בהצלחה!

---

① הטענה $p\wedge q \models q\to r, \neg r\to p, p$ משמעותה

שהנוסחה ______ $= \alpha$ אינה ניתנת לסיפוק.

נוסחה α שקולה לנוסחת ה CNF ______ $=\beta$

רשום הכחשת רזולוציה לנוסחה β:

1. ______
2. ______
3. ______
4. ______
5. ______
6. ______
7. ______
8. ______

הקבוצה האינסופית של נוסחות $\{p_i \vee (\neg p_{i+1} \wedge \neg p_{i+2}) \mid i=1,2,3,\ldots\}$

הינה ______ (כן / לא) ניתנת לסיפוק. כדי להוכיח עובדה

זו ניתן להיעזר במשפט ______ (הרזולוציה / הקומפקטיות / הרברנד)

7. ______

כפי הדורך

6

לוגיקה מתמטית

שם ~~ב~~ משני מועד ב

ידופק

3) יהי α הפסוק $\forall x \exists y \left[r(x,y) \wedge r(f(x),y) \right]$

יהי β הפסוק $\exists y \exists x \left[r(x,y) \wedge r(f(x),y) \right]$

מצא אינטרפרטציה I כך ש I מודל ל α ולא ל β

" I' " I' " β " α

$|I| =$ ______ $r_I =$ ______ $f_I =$ ______

$|I'| =$ ______ $r_{I'} =$ ______ $f_{I'} =$ ______

(אם לא קיימת אינטרפרטציה כנ"ל סמן ב X)

יהי α הפסוק: $\forall x \left(p(x) \to \left[\forall y (q(x,y) \to r(x))\right]\right)$

$\wedge \exists x \left(p(x) \wedge \exists y \left(q(x,y) \wedge h(x,y)\right)\right)$

$\wedge \neg \exists x \exists y \left(r(x) \wedge h(x,y) \wedge s(x,y)\right)$

השתמש בסקולמיזציה למציאת פסוק אוניברסלי α_s כך

ש α_s ניתן לסיפוק אם ורק אם α ניתן לסיפוק

$\alpha_s =$ ______________________________

____

____

29

יהי φ הפסוק האוניברסלי

עוגדף מתמטיות סמי זה מושג זה

$$\forall x\, \forall y \left\{ \begin{array}{l} r(x,y) \\ \land \left[s(x,y) \lor \neg r(y, h(x,y)) \lor \neg r(h(x,y), h(x,y)) \right] \\ \land \left[\neg r(y, h(x,y)) \lor \neg r(h(x,y), h(x,y)) \lor \neg s(x, h(x,y)) \lor \neg s(h(x,y), h(x,y)) \right] \end{array} \right.$$

צריך תוסף

עולם ההרברנד של φ = ______

קבוצת הכללים של φ = ______

רשום הכחשת רזולוציה של φ:

1. ______
2. ______
3. ______
4. ______
5. ______
6. ______
7. ______

(המשך מעבר לדף כפי הדרוש)

8 -62-

Logic 88-700-01, Moed 2, 1986
Lecturer: Dr. Larry Manevitz
Duration of examination: 2 1/2 hours

<u>Answer any 4 out of 5</u>:

I. (a) Define: two sets have the same cardinality (i.e. the same "size").

(b) Show that the natural numbers and the even numbers have the same cardinality.

II. Show that the reals between 0 and 1 and the natural numbers have <u>different</u> cardinality.

III. State the continuum hypothesis. Describe what is known about it.

IV. Desribe what is meant by a formal system. Be sure and define all the main features.

V. Here is the MU system (of Hofstadter). Alphabet = {M,I,U}. Formulas = {all words in M,I,U}. Axioms = {MI}.

<u>Rules</u>: Let w be any <u>word</u> (i.e. string of symbols in the alphabet).

1. From wI you may infer wIU.
2. From Mw you may infer Mww.
3. If III appears in w, you may infer (from w) the word obtained by replacing III by U in w.
4. If UU occurs in a word you may infer the word obtained by dropping the UU from it.

<u>Here</u> is a formal proof of MUIIU. <u>Justify each step in the proof</u>.

<u>Statement</u>	<u>Reason</u>
1. MI	
2. MII	
3. MIIII	
4. MIIIIU	
5. MUIU	
6. MUIUUIU	
7. MUIIU	

Fall, 198 **9** *Introduction to Mathematical Logic*

Moed B: 2 hours Lecturer: Dr. L. Manevitz

Show all work. Do each problem on a fresh page. Good Luck!

I. Which of the following are tautologies? Prove your answer.
(a) $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge q)$ (b) $(\neg p \to q) \leftrightarrow (p \vee q)$.

II. $(p \to \neg q) \& (r \to p)$. Find an equivalent formula in DNF.

III. (a) State the Completeness Theorem
(b) Show that $p \to (q \vee r)$ is not a theorem in our system
(c) Show that $p \to (p \to p)$ is a theorem in our system

IV. In our formal system the only rule of deduction is modus ponens.
Our axioms are of the form: (1) $p \to (q \to p)$ (2) $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$
(3) $[(\neg q \to \neg p)] \to [(\neg q \to p) \to q]$.

Here p, q, r can be any formulas even complicated ones.
Recopy the following into your answer book and fill in the blanks (underline your answer.)

~~Theorem.~~ We wish to prove $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$.
First we give a formal proof of
$\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$ (break)

Please fill in the reasons.

		Reason
(1)	$A \to B$	Hypothesis (given) [This is an example]
(2)	$B \to C$	__________
(3)	A	__________
(4)	B	__________
(5)	C	__________

Now show how we can deduce $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$.
Justify your answer. (i.e. state in full any theorem you use.)

V. (a) State the Compactness Theorem
(b) Show that if any finite map can be covered with four colors then so can any infinite map.

דף 1 מתוך 2

ב"ה, בחינה בלוגיקה, 700-88, סמסטר ב' מועד ב' תשמ"ו

שם המרצה: ד"ר לרי מנביץ.

משך הבחינה: שעתיים.

תאריך הבחינה: 15,9,86

ענה על 4 מתוך 6 השאלות הבאות:

1. Γ קבוצה עקבית של נוסחות, הוכח שקיים קבוצה Δ של נוסחות כך ש-

1. Δ עקבית.
2. לכל φ (בחתימה של Δ) $\varphi \in \Delta$ או $\neg\varphi \in \Delta$
3. לכל φ ולכל משתנה x קיים סימן קבוע c כך שהנוסחה $(\neg\forall x\, \varphi \rightarrow \neg\varphi[^c_x])$ שייכת ל- Δ

2. אילו מהבאים נכונים ? הוכח את תשובתך.

(α, β הן נוסחות)

1. $\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta)$
2. $\vdash \exists x\alpha \wedge \exists x\beta \rightarrow \exists x(\alpha \wedge \beta)$
3. $\vdash \alpha(y) \leftrightarrow \forall x(x \approx y \rightarrow \alpha(x))$

3. הוכח שקיימת חבורה אין סופית כך שלכל x בחבורה $x \cdot x = e$.

(רמז: תחשוב על חבורות Z_{2n} לכל n).

4. Γ_1, Γ_2 הן קבוצות של נוסחות באותו שפה כך ש- <u>לא</u> קיים מבנה כך ש- $A \models \Gamma_1$ ו- $A \models \Gamma_2$

הוכח שקיים נוסחא φ באותה שפה כך ש-

1. $A \models \varphi \Leftarrow A \models \Gamma_1$
2. $A \models \neg\varphi \Leftarrow A \models \Gamma_2$

5. L היא שפה עם $\approx$ וסימן יחס $R(,)$ דו-מקומי.

1. רשום אוסף של נוסחות Γ בשפה הזו כך ש- $A \models \Gamma$ אם ורק אם:

א. $||A||$ היא אין סופית

ב. R^A הוא יחס שקילות

סמ' ב'
מועד ב'

(המשך בחינה בלוגיקה)

המשך שאלה 5:

2. נסח את משפט Los-Vaught

3. הוכח ש- T היא תורה שלמה.

ב. R = <ממשים, +, x, 0, 1>

הוכח שיש הרחבה U כך ש-

1. $U \equiv R$ (מספקים אותו פסוקים בשפה המתאימה).

2. U היא בין מניה.

3. כל מספר רציונלי שייכת ל- U

בהצלחה !

דף 1 מתוך 2

29.8.89

ו'

12

בחינה בלוגיקה מתמטית
סימסטר ב', מועד ב'

זמן הבחינה: שעתיים.
יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח:

א) גזירה (הוכחה) של נוסחה ψ מקבוצת הנחות Γ במערכת דדוקטיבית.

ב) איזומורפיזם בין שני מערכות (מבנים) מאותו טיפוס σ.

ג) $\varphi(t/x)$ (תוצאות הצבה של t עבור x בנוסחה φ).

2. לנמק בקצרה או להפריך ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות, כאשר L שפה כלשהי מסדר ראשון.

א) אם φ, ψ נוסחאות של L, x משתנה אז
$\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\varphi \vee \forall x\psi$.

ב) אם לפסוק φ של L יש מודל אינסופי אז יש לו שני מודלים אינסופיים לא איזומורפיים.

ג) כל שני מודלים אינסופיים לשפה L הם שקולים אלמנטרית.

3. תהי L שפה פסוקית עם שלושה אטומים p, q, r והקשר $\wedge$ בלבד. תהי Σ המערכת הדדוקטיבית ב-L בעלת שלושת כללי ההסק הבאים:

$$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}, \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}, \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}.$$

להוכיח ש-Σ נכונה באופן חזק ושלמה באופן חזק (לשפה L).

4. תהי L_1 שפה מסדר ראשון עם פרדיקט חד-מקומי P, שהוא הקבוע הלא-לוגי היחיד שלה, והקבועים הלוגיים $=, \sim, \vee, \exists$. להוכיח שכל שני מודלים איזומורפיים לשפה L_1 הם שקולים אלמנטרית.

הערה: כידוע המסקנה נכונה לכל שפה L מסדר ראשון. ההתייחסות ל-L_1 בלבד נועדה רק לפשט את הסימונים ולהקטין את מספר הסעיפים בהוכחה.

13

בחינה בלוגיקה, עמוד 2

5. תהי L_1 השפה הנדונה בשאלה 4. מודל $Q = \langle A,B \rangle$ לשפה זו יקרא עשיר כאשר גם B וגם $A \setminus B$ הן קבוצות אינסופיות. (בסימון $Q = \langle A,B \rangle$ A התחום (העולם) של המודל ו-B הפרוש ב-Q של הפרדיקט P, כך ש-$B \subseteq A$.)

א) להראות שקיימת קבוצת פסוקים Γ_1 ב-L_1 כך שהמודלים של Γ_1 הם בדיוק המודלים העשירים לשפה.

ב) להראות שלא קיים פסוק φ ב-L_1 שהמודלים שלו הם בדיוק המודלים העשירים לשפה.

[רמז ל-(ב): אם קיים φ כזה הוא יהיה תוצאה לוגית של Γ_1 שנבנתה בחלק (א) ולכן גם תוצאה לוגית של תת-קבוצה סופית של Γ_1; בדוק שלכל תת-קבוצה סופית של Γ_1 שבנית בחלק (א) יש מודל שאינו עשיר.]

בהצלחה

(14)

לוגיקה מתמטית 1 - 88-200-03 - מועד ב' תשנ"ב

המרצה: פרופ' ע. אמיר

משך הבחינה: שעתיים

מותר להעזר במחברות

(נק') 1. הראה אם הנוסחה הבאה טאוטולוגיה או לא.

$$((A \vee B) \wedge (D \supset \sim B)) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)))$$

(נק') 2. הוכח שאם A ניתנת למניה רקורסיבית בסדר יורד אז A כריעה.

(נק') 3. מה המשתנים החופשיים של הנוסחה $\forall x((\forall y(A(x,y,z))) \supset (\forall z(A(z,y,x))))$

(נק') 4. האם $f_1^2(x_1,x_2)$ חופשי ל-x_1 בנוסחה $\forall x_2\, A_1^2(x_2,a_1)) \vee (\exists x_1(A_1^2(x_1,x_2)))$

(נק') 5. הוכח מבלי להשתמש במשפט השלמות:

$$\vdash_K \forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \beta)$$

(נק') 6. האם קיימת תורה עקבית שהמשפטים שלה נכונים בכל ההשמות עם תחומים סופיים אבל שאין לה שום מודל אינסופי? הוכח טענתך.

(נק') 7. הגדר תחום ופרדיקטים וכתוב בעזרתם פסוק בתחשיב הפרדיקטים האומר: "ניתן להטעות חלק מהאנשים כל הזמן וניתן להטעות את כל האנשים חלק מהזמן אבל לא ניתן להטעות את כל האנשים כל הזמן".

(נק') 8. הוכח $\nvdash_K (\forall x\alpha \supset \forall x\beta) \supset \forall x(\alpha \supset \beta)$

(מותר להעזר במשפט השלמות)

בהצלחה

17

דף 1 מתוך 2

ב״ה, בחינה בלוגיקה, מועד א׳ סמסטר ב׳, תשמ״ו, 88-372

תאריך הבחינה: 15,6,86

שם המרצה: ד״ר לרי מנביץ

שימו לב: למבחן 2 עמודים!

משך הבחינה: שעתיים

חובה עליך לענות על שאלה מס׳ 1 ועל 3 מתוך 5 האחרות:

1. (שאלה חובה)

נסח את המשפטים הבאים:

א. משפט השלמות

ב. משפט הקומפקטי

ג. משפט Lowenheim-Skolem עולה

ד. משפט Lowenheim-Skolem יורד

ה. משפט הנכונות

ענה על 3 שאלות מתוך 5 הבאות:

2. איזה מהבאים נכונים. הוכח את תשובתיך (ז״א הוכח שהוא נכון או הן דוגמא נגדית)

1. $\vdash \forall_x \exists_y \psi(x,y) \rightarrow \exists_y \forall_x \psi(x,y)$

2. $\vdash \forall_x \psi(x) \rightarrow \psi(a)$

3. $\vdash \psi(a) \rightarrow \forall_x \psi(x)$

4. $\vdash \exists_y \forall_x \psi(x,y) \rightarrow \forall_x \exists_y \psi(x,y)$

3. א. ממשפט השלמות הוכח את משפט הקומפקטי

ב. ממשפט הקומפקטי הוכח את משפט Lowenheim-Skolem עולה.

4. נתון לך קבוצה Δ של נוסחאות בשפה (בלי =) כך ש-

1. לכל נוסחא φ בשפה $\varphi \in \Delta$ או $\neg\varphi \in \Delta$

2. Δ עקבית

3. לכל נוסחא ψ בשפה ולכל משתנה x קיים קבוע c כך ש- $\neg\forall_x \psi \rightarrow \neg\psi\left[\frac{c}{x}\right]$

נמצאת ב- Δ בנה מודל $[\mathfrak{A}/s]$ כך ש- $[\mathfrak{A}/s] \models \Delta$

2/...

18

13 במועד ב
לוגי' דף

מועד ג
סמ' ב'
תשמ"ו

המשך בחינה בלוגיקה:

5. א. הוכח שהמחלקה של חבורות הוא EC.

ב. האם הקבוצה של חבורות אין סופיות EC? EC_δ? הוכח

ג. האם הקבוצה של חבורות סופיות EC? EC_δ? הוכח

6. א. נסח את משפט Łos-Vaught.

ב. ־יכח שהתורה של סדר ליבארית צפוף בלי איבר ראשון או אחרון (DLO) הוא שלם.

בהצלחה !

Examination ; Logic   6/9/86

Lecturer: Dr. Larry Manevitz   Two hours.

19

Answer any 4 out of 5.

I. (a) Define : two sets have the same cardinality (i.e. the same "size")

(b) Show that the natural numbers and the even numbers have the same cardinality.

II. Show that the reals between 0 and 1 and the natural numbers have different cardinality.

III. State the continuum hypothesis. Describe what is know. about it,

IV. Describe what is meant by a formal system. Be sure and define all the main features

V. Here is the MU system (of Hofstadter). Alphabet = {M, I, U}
Formulas = {all words in M, I, U}. Axioms = {MI}

Rules. Let w be any word (i.e. string of symbols in the alphabet)

① From wI you may infer wIU

② From Mw you may infer Mww.

③ If III appears in w, you may infer (from w) the word obtained by replacing III by U in w.

④ If UU occurs in a word you may infer the word obtained by dropping the UU from it.

Here is a formal proof of MUIIU. Justify each step in the proof.

	Statement	Reason
①	~~[illegible]~~ MI	______
②	MII	______
③	MIIII	______
④	MIIIIU	______
⑤	MUIIU	

21

1 מתוך 3

16.2.88 מבוא ללוגיקה א'

זמן הבחינה: שעתיים.
מותר להשתמש בחומר עזר מכל הסוגים.
יש לבחור 3 מתוך 5 השאלות הבאות.
בבדיקה יינתנו נקודות נוספות עבור כתיבה ברורה
ומסודרת - נא הקפידו לנקות חלק מהבחינה המיועד להגשה.

בהצלחה

1. אילו מבין הטענות הבאות אמיתיות? טענה נכונה
יש לנמק בקצרה. לטענה שאינה נכונה יש להפריך
ע"י דוגמא נגדית.
א) בשפה פסוקית שהקשרים היחידים שלה הם $\not\equiv, \wedge, \vee$
אין טאוטולוגיות.
ב) אם Γ קבוצה אינסופית של נוסחאות בשפה
פסוקית אז יש ל-Γ קבוצה סופית Δ של Γ כך ש-
$Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.
ג) נאמר על שתי נוסחאות A, B של השפה הנדונה
הראשון שהן שקולות מעל המבנה $\mathfrak{N}$ כאשר $\|A\| = \|B\|$ לכל
השמה ℓ לתוך המבנה המתאים לעיל (כלומר שמתאימה
מכיל את $FV(A) \cup FV(B)$).
הנוסחאות $0 < v_1$ ו- $\exists v_2 (v_1 = v_2 \cdot v_2 \wedge \exists v_3 (v_2 \cdot v_3 = 1))$
שקולות מעל המבנה.
ד) הפסוק $\forall v_1 [\exists v_2 (0 < v_1) \to \exists v_3 \forall v_3 (v_1 = v_3 \cdot v_3)]$
אמיתי במבנה. [קבוצת המספרים לפי ההגדרה הנתונה.]

39 3ל ב מועד 3

16.2.88 לוגיקה

22

בחינה בלוגיקה - המשך (עמוד 2)

9. יהי L שפה פסוקית עם קבוצת האטומים P ועם הקשרים: $\vee, \wedge, \sim, f, t$ בלבד.

נגדיר מודל קבוצתי לשפה L כזוג סדור $\mu=(X,S)$, כאשר X קבוצה כלשהי, S פונקציה שתחומה P ועבור כל p ב- P $S(p) \subseteq X$

[כלומר - לכל אטום של השפה מתאימה תת-קבוצה של X.]

נגדיר את הערך $\|A\|_\mu$ של נוסחה A במודל הקבוצתי $\mu=(X,S)$ באינדוקציה על מבנה A כדלקמן:

עבור אטום p: $\|p\|_\mu = S(p)$;

$\|t\|_\mu = X$; $\|f\|_\mu = \emptyset$;

$\|\sim A\|_\mu = X - \|A\|_\mu$;

$\|A \vee B\|_\mu = \|A\|_\mu \cup \|B\|_\mu$; $\|A \wedge B\|_\mu = \|A\|_\mu \cap \|B\|_\mu$.

[כלומר - הפעולות הלוגיות $\sim, \wedge, \vee$ מתפרשות כמשלים, חיתוך ואיחוד של קבוצות.]

נאמר שהנוסחאות A, B שקולות קבוצתית כאשר $\|A\|_\mu = \|B\|_\mu$ לכל מודל קבוצתי μ.

להוכיח שהנוסחאות A, B הן שקולות קבוצתית אםם הן שקולות לוגית.

[רמז: יש דרך טבעית לעבור ממודל (רגיל) z, כלומר פונקציה $z: P \to \{T,F\}$, למודל קבוצתי (X,S) שבו X קבוצה בעלת איבר אחד. מצד שני, אם יש מודל קבוצתי $\mu=(X,S)$ שבו $\|A\|_\mu \neq \|B\|_\mu$ אז יש ב- X איבר x השייך ל- $\|A\|_\mu$ ולא ל- $\|B\|_\mu$ או להפך, ואפשר להשתמש בו כדי לבנות מודל z שבו $\|B\|_z \neq \|A\|_z$.]

דף 3 מתוך 3
לוגיקה 16.2.88

23

בחינה בלוגיקה - מועד ב

3. א) האם קיימת נוסחה הבנויה מהאטומים q, p בעזרת הקשר $\rightarrow$ בלבד ואשר שקולה לוגית לנוסחה $p \wedge q$?

ב) אותה שאלה לגבי הנוסחה $p \vee q$ (במקום $p \wedge q$).

התשובות לשני החלקים צריכות להיות מנומקות (עם דוגמה לנוסחה המבוקשת או הוכחה שאין כזאת).

4. תהי Σ קבוצה סופית, Σ^* קבוצת כל הסדרות הסופיות של איברים מ- Σ, Σ^ω קבוצת כל הסדרות האינסופיות של איברים מ- Σ. נקרא לאברי Σ אותיות, לאברי Σ^* מילים סופיות (מעל Σ) ולאברי Σ^ω מילים אינסופיות (מעל Σ).

להוכיח שאם T קבוצה אינסופית של מילים סופיות אז קיימת מילה אינסופית z אשר כל רישא סופית שלה היא רישא של אחת המילים ב- T (כלומר - לכל n קיימת מילה t_n ב- T אשר n האותיות הראשונות של z מהוות רישא שלה).

[רמז: יש גם הוכחה קומבינטורית ישירה, בלי שימוש בלוגיקה ובמשפט הקומפקטיות.]

5. בשפה מסדר ראשון של מערכת המספרים הטבעיים, שהוגדרה בכיתה, נגדיר נוסחה מינימלית כנוסחה אטומית שצורתה $\sigma = \tau$ (σ, τ ביטויי השפה) או נוסחה הבנויה מנוסחאות אטומיות בעזרת הקשרים $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ (אך ללא שלילה) בלבד. להוכיח שכל נוסחה בשפה הנ"ל שקולה מעל הטבעיים לנוסחה מינימלית.

[רמז: ראה שאלה 1(ג). השתמש גם בעובדה שהנוסחאות $\sim\forall x A$, $\exists x \sim A$ שקולות וכן גם $\sim\exists x A$, $\forall x \sim A$.]

12.9.90 בחינה בלוגיקה מתמטית סמסטר ב', מועד ב', תש"ן

24

דף 1 מתוך 2

זמן הבחינה: שעתיים.

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח -

א) נוסחה בצורה פרנכסית נורמלית;

ב) משפט LST (לוונהיים-סקולם-טרסקי).

2. תהי L שפה מסדר ראשון.

א) להגדיר מתי נוסחה ψ של L היא תוצאה לוגית במובן הרחב של קבוצת נוסחאות Γ.

ב) להוכיח שיחס התוצאה הלוגית במובן הרחב (בין נוסחאות לקבוצות של נוסחאות) הוא יחס תלותי.

3. תהי L שפה מסדר ראשון עם סמל הפעולה $+$ וכל הקבועים הלוגיים הרגילים ויהי φ הפסוק $\exists! v_1 \forall v_2 (v_1+v_2=v_2)$.

א) מצא פסוק φ' שקול לוגית ל-φ שמופיעים בו הקבועים הלוגיים $=, \sim, \wedge, \vee, \forall, \exists$ בלבד.

ב) מצא פסוק φ'' בצורה פרנכסית נורמלית שהינו שקול לוגית ל-φ.

4. א) להגדיר מתי שתי מערכות $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ מאותו טיפוס הן שקולות אלמנטרית.

ב) נמק בקצרה או תן דוגמה נגדית:

[1] אם G ו-H חבורות וקיים הומומורפיזם מ-G על H אז G ו-H שקולות אלמנטרית.

[2] כל שני שדות סדורים בני מניה הם שקולים אלמנטרית.

5. להוכיח שכל סדר ליניארי ניתן לשיכון בסדר ליניארי צפוף.
ביתר פירוט: תהי A קבוצה ויהי $<_A$ סידור ליניארי שלה. אז

3 ל' בעמוד 2 — עמוד 2 —

מלגידס סמ' ב' מועד ב'

25 12.9.90

קיימות: קבוצה B, סידור לינארי צפוף $<_B$ של B ופונקציה שומרת סדר $f : A \to B$.

[הערות: סידור לינארי $<_B$ של B נקרא צפוף כאשר בין כל שני איברים שונים של B יש איבר ביניהם; פונקציה $f : A \to B$ נקראת שומרת סדר כאשר

$$x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y)$$

לכל x, y ב- A. מכאן נובע גם ש- f חח"ע.

רמז: שימוש במשפט הקומפקטיות לקבוצת פסוקים מתאימה Γ בשפה מסדר ראשון L הכוללת סמל יחס בינארי $<$ וקבוע c_a עבור כל איבר a של A. Γ כוללת, בין השאר, את הפסוקים $c_{a_1} < c_{a_2}$ לכל זוג איברים a_1, a_2 של A כך ש- $a_1 <_A a_2$. להוכחת הספיקות הסופית של Γ אפשר לנצל את הסדר הרגיל של הרציונליים.]

בהצלחה

26

בחינה ב~~[illegible]~~ מתמטיקה

מרצה: דר' לב מנב'   זמן הבחינה: שלוש שעות

I. (חיוב לענות על שאלה הזו)

נסח את המשפטים הבאים:

(a) משפט השלמות

(b) משפט הקומפקטיות

(c) משפט Lowenheim-Skolem יורד

(d) משפט הנכונות

ענה על 3 מתוך שאלות II - VI

II. קבע אם המשפטים הבאים נכונים והוכח את תשובתך

(צ"ל - הוכח שהטענה נכונה או תן דוגמא נגדית)

(a) $\vdash \forall x \psi(x) \to \psi(a)$

(b) $\vdash \psi(a) \to \forall x \psi(x)$

(c) $\vdash \forall x \exists y\, \psi(x,y) \to \exists y \forall x\, \psi(x,y)$

(d) $\vdash \exists y \forall x\, \psi(x,y) \to \forall x \exists y\, \psi(x,y)$

III. (a) ממשפט השלמות הוכח את משפט הקומפקטיות.

(b) ממשפט הקומפקטיות הוכח את משפט L-Sk עולה.

IV. (a) הראה כי מחלקת כל החבורות היא EC.

(b) האם מחלקת כל החבורות האינסופיות היא EC? EC_Δ? הוכח.

(c) האם מחלקת כל החבורות הסופיות היא EC? EC_Δ? הוכח.

31 בממוצע

מאגיד ממממטית

ממוצע 30

27

3 ש'   בחינה בלוגיקה

V. Δ היא קבוצה של נוסחות בשפה נתונה כך ש:

(1) Δ עקבית

(2) לכל נוסחה φ בשפה, $\varphi \in \Delta$ או $\neg\varphi \in \Delta$.

(3) לכל נוסחה φ ולכל משתנה x קיים קבוע c כך ש

$$\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi[\tfrac{c}{x}] \in \Delta$$

הוכיחו שיש מודל $[\sigma|s]$ כך ש $[\sigma|s] \models \Delta$.

VI. (א) נסח את ~~הגדרת~~ משפט Łos-Vaught. 3 נק'

(ב) הוכח שהתורה של סדר ~~...~~ לינארי ~~...~~ צפוף בלי איבר ראשון או אחרון היא תורה שלמה.

88 - ~~237~~ 372

דף 1 מתוך 2

בחינה [redacted]

מועד ג', תשמ"ח

7.9.88

28

זמן הבחינה: שעתיים.

מותר להשתמש בכל חומר עזר (ספרים, מחברות וכו').

יש לענות על שלוש מתוך השאלות הבאות.

1. א) מצא נוסחה בצורה פרנכסית נורמלית השקולה לוגית לנוסחה הבאה:

$$\exists v_1(v_1 < v_2 \wedge \sim(v_1 < v_3)) \leftrightarrow v_3 < v_2 .$$

ב) האם הנוסחה הבאה תקפה לוגית? התשובה צריכה להיות מנומקת.

$$(v_1 = v_3 \vee v_1 = v_4) \wedge (v_2 = v_3 \vee v_2 = v_4) \wedge v_1 \neq v_2 \wedge (v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1) \rightarrow v_1 \cdot v_2 = v_3 \cdot v_4 .$$

2. לנמק בקצרה או להפריך ע"י דוגמא נגדית כל אחת מהטענות הבאות.

א) אם A, B נוסחאות בשפה מסדר ראשון, x משתנה אז

$$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B .$$

[$\equiv$ מסמן שקילות לוגית.]

ב) כמו (א), רק $\vee$ במקום $\wedge$ בשני האגפים.

ג) הנוסחה $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0$ היא תוצאה לוגית של הנוסחה $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$.

ד) כל שדה סדור בר-מניה שקול אלמנטרית לשדה הסדור של הרציונליים.

3. תהי L_0 השפה מסדר ראשון שאין בה סמלים לא-לוגיים (הנוסחאות האטומיות היחידות של L_0 הן מהצורה $x=y$ כש- x,y

דף במעיר 2

29 משמר

אגודה מתמטית
מועד ב'

בחינה בלוגיקה מתמטית, עמוד 2 7.9.88

3. קבוצה לא ריקה M שהיא קבוצת האברים שלו, ונכתוב $\langle M\rangle=\mathfrak{M}$.
יהי A פסוק של L_0 ונניח שקיים מודל אינסופי $\mathfrak{M}_0$ לשפה שבו A אמיתי.

א) להוכיח ש- A אמיתי בכל מודל אינסופי $\mathfrak{M}$ לשפה L_0.
[רמז: להראות בעזרת משפטי לוונהיים סקולם ש- $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}$ שקולים אלמנטרית.]

ב) להוכיח שקיים מספר טבעי n כך ש- A אמיתי גם בכל מודל סופי שמספר איבריו גדול מ- n.
[רמז: אחרת ניתן לקבל בעזרת משפט הקומפקטיות מודל אינסופי של $\sim A$, בסתירה ל-(א).]

4. עבור כל מספר טבעי n נסמן ב- $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ את תת-השדה של הממשיים שאבריו הם כל המספרים מהצורה $a+b\sqrt{n}$ כש- a, b רציונליים כלשהם. [ידוע שאם n אינו ריבוע של מספר שלם אז $\sqrt{n}$ הוא אי-רציונלי ולכל איבר ב- $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ יש הצגה יחידה בצורה $a+b\sqrt{n}$ כש- a, b רציונליים.]
להראות שאף שנים מבין השדות
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{3}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{7}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{11}),\ \ldots$$
אינם שקולים אלמנטרית.
[רמז: עבור כל n טבעי יש פסוק A_n בשפת השדות המביע קיום שורש ריבועי ל- n. העזר בפסוקים אלה עבור n-ים מתאימים.]

5. יהי $\mathfrak{M}$ מודל לשפה מסדר ראשון L ותהי $A_1, A_2, A_3, \ldots$ סדרה אינסופית של נוסחאות ב- L שלכולן אותו משתנה חופשי יחיד x. נתון שעבור כל n טבעי הפסוק $\exists x(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)$ אמיתי ב- $\mathfrak{M}$. האם נובע שקיים איבר a של המודל כך שכל הנוסחאות A_n אמיתיות ב- $\mathfrak{M}$ תחת ההשמה

30

V דף 1 מתוך 3

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

אוניברסיטת בר-אילן

מחלקה למתמטיקה ומדעי המחשב.

מבחן בלוגיקה מתמטית.

מועד א.

מספר הקורס הוא 88-200-04

מרצה: בוריס קוניאבסקי

זמן המבחן הוא 3 שעות,
הפסקה היא 10 דקות.

31

3 במועד ל3

בוריס קוניאבסקי

מועד א — מתמטיקה

פרק 1, זמן הפרק הוא 1,5 שעות.

1. Для формул алгебры высказываний:

а) дать определения конъюнктивного одночлена, дизъюнктивной нормальной формы, совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ); (5 баллов);

б) сформулировать и доказать теорему существования СДНФ для формул алгебры высказываний; (25 баллов).

в) обозначим через $P \oplus Q$ формулу $\neg(P \Leftrightarrow Q)$ (сумма Жегалкина); доказать, что $(P \oplus Q) \oplus R \cong P \oplus (Q \oplus R)$ и найти СДНФ для $P \oplus Q \oplus R$. (15 баллов).

2. Является ли тавтологией формула

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)) \quad ?$$

(15 баллов).

32

דף 3 מועד 3
בוריס קוניאבסקי
לוגיקה מתמטית
מועד 3 ג

פרק 2, זמן הפרק הוא 1,5 שעות.

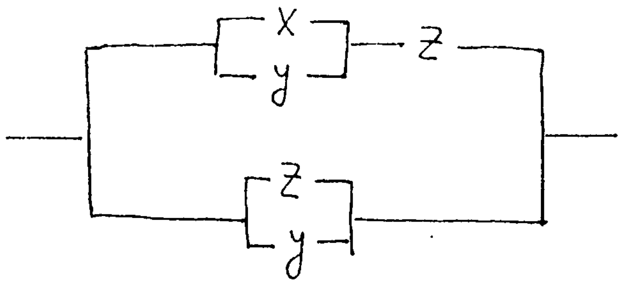
1. Для булевых функций:

а) дать определения суперпозиции, полного класса, собственного класса, замкнутого класса; (5 баллов)

б) доказать собственность и замкнутость классов булевых функций P_0 (сохраняющих 0), P_1 (сохраняющих 1), S (симметричных), M (монотонных), L (линейных).

(25 баллов).

2. Упростить схему:



(15 баллов).

3. Построить отрицание следующего высказывания и записать его словами:

$$(\exists x)(\forall y)\ ((y \neq 0) \Rightarrow (x + y = x)).$$

(15 баллов).

דף 1 מתוך 3

33

אוניברסיטת בר-אילן

מחלקה למתמטיקה ומדעי המחשב.

מבחן בלוגיקה מתמטית.

מועד ב.

מספר הקורס הוא 88-200-04

מרצה: בוריס קוניאבסקי

זמן המבחן הוא 3 שעות,
הפסקה היא 10 דקות.

(34)

3 מועד ב 13

פרק 1, כאן הפרק הוו 1,5 שעות.

לוגיקה מתמטית
מועד ב
דוניאבסקי
גולס

1. а) Дать определение логического следования формулы H из формул $F_1, \dots, F_m$. (5 баллов).

б) Доказать критерий логического следования формулы H из формул $F_1, \dots, F_m$ в терминах совершенных нормальных форм (25 баллов).

в) С помощью этого критерия выяснить, является ли формула $H = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$ логическим следствием формул

$$F_1 = P \vee (Q \wedge R) \quad \text{и} \quad F_2 = Q \vee (P \wedge R)$$

(20 баллов).

2. Является ли тавтологией формула

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q)) \quad ?$$

(10 баллов).

35

פרק 2, זמן הפרק הוא 1,5 שעות

1. а) Дать определение суперпозиции булевых функций (5 баллов).

б) Доказать теорему о выражении булевой функции в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (25 баллов).

2. Являются ли ассоциативными операции:

а) $x \uparrow y$ (стрелка Пирса);

б) $x \mid y$ (штрих Шеффера);

в) $x \oplus y$ (сумма Жегалкина) ?

(15 баллов).

3. Построить отрицание следующего высказывания и записать его словами:

$$(\exists x)(\exists y)(\forall z)\{(x+y\neq z)\vee(\exists t)[(x+y\neq t)\wedge(z\neq t)]\}$$

(x, y, z, t – переменные, принимающие значения в множестве действительных чисел).

(15 баллов).

36

בחינה בלוגיקה מתמטית   סמסטר ב', מועד א'   תש"ן

12.7.90   דף 1 מתוך 2   88.574

זמן הבחינה: שעתיים.

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. להגדיר את המושג "מערכת דדוקטיבית נכונה ושלמה" (לשפה פסוקית L). יש לכלול גם הגדרות מקדימות, החל מהגדרת מערכת דדוקטיבית (סתם), אבל רק את מה שדרוש לצורך ההגדרה הסופית.

2. תהי L שפה מסדר ראשון.

א) להגדיר מתי נוסחה ψ של L היא תוצאה לוגית במובן הרחב של קבוצת נוסחאות Γ.

ב) נמק בקצרה או תן דוגמא נגדית:

[1] אם φ, ψ תקפות לוגית אז כל אחת מהן תוצאה לוגית במובן הרחב של האחרת (נאמר אז בקיצור שהן שקולות במובן הרחב).

[2] אם φ, ψ שקולות במובן הרחב אז הן שקולות לוגית.

3. תהי L שפה מסדר ראשון עם סמל פונקציה + וכל הקבועים הלוגיים הרגילים. יהי φ הפסוק

$$\forall v_1 \exists v_2 (v_1 + v_1 = v_2) \longleftrightarrow \exists! v_1 \forall v_2 (v_1 + v_2 = v_2).$$

א) מצא פסוק φ' שקול לוגית ל-φ שמופיעים בו הקבועים הלוגיים $=, \sim, \vee, \exists$ בלבד.

ב) מצא פסוק φ'' בצורה פרנקסית נורמלית שהינו שקול לוגית ל-φ.

[רצוי לפשט את φ', φ'' כמיטב האפשר.]

4. תהי L שפה מסדר ראשון עם כל הקבועים הלוגיים הרגילים.

א) להראות שקיימת סדרת פסוקים $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ של L כך שלכל n שלם חיובי המודלים של φ_n הם בדיוק המודלים $\mathfrak{A}$ לשפה L המקיימים $n \le |A|$ (דהיינו, מודלים בעלי n איברים לפחות).

דף 2 מתוך 2
12.7.90

37
6

בחינה בלוגיקה, עמוד 2

ב) להראות שלא קיים פסוק ψ של L אשר המודלים שלו הם בדיוק המודלים הסופיים לשפה L. [רמז: משפט הקומפקטיות.]

5. תהי L שפה מסדר ראשון עם הקבועים הלוגיים
$=, \underline{t}, \underline{f}, \sim, \wedge, \vee, \forall, \exists$
בלבד. נוסחאות של L שבהן הקשר $\sim$ אינו מופיע נקראות נוסחאות חיוביות. להוכיח שאם $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ מודלים לשפה L כך ש- $\mathcal{B}$ תמונה הומומורפית של $\mathcal{A}$ אז כל פסוק חיובי אמיתי ב- $\mathcal{A}$ הינו אמיתי גם ב- $\mathcal{B}$.
[רמז: יהי $f : A \xrightarrow{\text{על}} B$ הומומורפיזם מ- $\mathcal{A}$ על $\mathcal{B}$. להוכיח באינדוקציה על נוסחאות חיוביות φ של L שאם α השמה לתוך A המתאימה ל- φ, כך ש- φ אמיתית ב- $\mathcal{A}$ תחת α, אז φ אמיתית ב- $\mathcal{B}$ תחת $f \circ \alpha$. בהוכחה יש לנסח ולהוכיח את הקשר בין $\|z\|_{\mathcal{A},\alpha}$ לבין $\|z\|_{\mathcal{B},f\circ\alpha}$ לכל ביטוי z של L והשמה α לתוך A המתאימה לו.]

בהצלחה