לוגיקה 88-200 תשנ"ג סמ' א' מועד ג' דף 1 מתוך 2

63

① איזו מהנוסחאות הבאות שקולות ל $(A\vee B)\rightarrow[(\neg C\vee C)\rightarrow\neg D]$

א. $\neg(A\wedge D)\wedge\neg(B\wedge D)$

ב. $\neg(A\vee D)\vee\neg(B\vee D)$

ג. $\neg(A\vee B)\vee(\neg C\vee\neg D)$

ד. $\neg(A\vee B)\vee(C\vee\neg D)$

② תהי I אינטרפרטציה: $D_I=\{0,1,2,3,\dots\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x\le y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

אילו מהפסוקים הבאים הם אמיתיים תחת האינטרפרטציה I ?

א. $\neg(\forall x\exists y\ \neg P(x,y))$

ב. $\neg(\forall y\exists x\ \neg P(x,y))$

ג. $\neg(\exists x\forall y\ \neg P(x,y))$

ד. $\neg(\exists y\forall x\ \neg P(x,y))$

③ יהי α הפסוק $\forall x\forall y\forall z\ [(P(x,y)\wedge P(y,z))\rightarrow P(x,z)]\wedge[P(x,y)\rightarrow P(x,f(y))]$

אילו מהאינטרפרטציות הבאות הן מודלים ל α.

א. $D_I=\{\text{הממשיים}\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x<y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $f_I(y)=y+.7$

ב. $D_I=\{1,2\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x=y=1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $f_I(1)=2$, $f_I(2)=1$

ג. $D_I=\{1,2,3,\dots\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x \text{ מחלק } y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $f_I(y)=2y$

ד. $D_I=\{\text{השלמים}\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x\ge y-1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $f_I(y)=y-3$

④ יהי α הפסוק $\forall x\exists y\ \neg(r(x)\rightarrow s(y))\vee\forall x\ t(x)$

אילו מהפסוקים הבאים ניתן להגיע מ α ע"י תהליך של "סקולמיזציה"?

א. $\forall x\ (r(x)\vee t(x))\wedge(\bar{s}(f(x))\vee t(x))$

ב. $\forall x\forall z\ (r(x)\vee t(z))\wedge(\bar{s}(c)\vee t(z))$

ג. $\forall x\forall z\ (r(x)\vee t(z))\wedge(\bar{s}(f(x))\vee t(z))$

ד. $\forall x\forall z\ (r(x)\vee t(z))\wedge(\bar{s}(f(x,z))\vee t(z))$

הערה: בכל אחת מהשאלות הנ"ל כל תת-קבוצה מהתשובות המוצעות מהווה פתרון אפשרי (כולל אחת מהן ועד כולן)

מראו α

64

[illegible]

$A \wedge B,\ B \to C,\ A \to (C \to D) \models D$

[illegible]

5) התבונן בטיעון

הוכח ע״י <u>הכחשת</u> רזולוציה שהטיעון תקף

1. ____________
2. ____________
3. ____________
4. ____________
5. ____________
6. ____________
7. ____________
8. ____________
9. ____________

) יהי α פסוק כך שייצוגו בצורה פסוקית הוא:

$\{\bar{t}(f(c))\}\quad \{\bar{r}(x,c),\ t(f(f(y)))\}\quad \{\bar{t}(z),\ s(z,v)\}$

$\{\bar{s}(f(w),\ d)\}\quad \{r(x,y)\}$

הוכח ע״י הכחשת רזולוציה ש α אינו ניתן לסיפוק

1. ____________
2. ____________
3. ____________
4. ____________
5. ____________
6. ____________
7. ____________
8. ____________
9. ____________
10. ____________

הערה: קבועים: c, d

פונקציה: f

משתנים: v, w, x, y, z

בס"ד

מבחן לדוגמא 1: לוגיקה 88-200

65

1. לכל אחת מהנוסחאות הבאות קבע אם הנוסחה:

א) טאוטולוגיה   ב) סתירה   ג) אחרת

i. $[P\to(P\to Q)]\to(P\to Q)$ ii) $P\to(\neg P\to Q)$ iii) $\neg R\to(P\wedge\neg P)$

2. השתמש באלגוריתם רזולוציה כדי להוכיח שהטענה הבאה נכונה:

$$P\to Q,\ R\vee\neg Q,\ \neg(P\wedge R)\models\neg P$$

3. התבונן בטענה $\forall x\exists y\, P(x,y)\models\exists y\forall x\, P(x,y)$

א. הטענה נכונה אם ורק אם הפסוק $\alpha=$ ________ אינו ניתן לסיפוק.

ב. מצא את הסקולמיזציה של α לצורה פסוקית β. (צורה פסוקית = צורה אוניברסלית ו-CNF)

ג. אם β אינו ניתן לסיפוק הראה הוכחת רזולוציה.

ד. אם β ניתן לסיפוק מצא מודל לצד שמאל של הטענה המקורית שאינו מודל לצד ימין של הטענה.

4. כמו שאלה 3 עבור הטענה $\exists y\forall x P(x,y)\to\forall x\exists y P(x,y)$.

בס"ד

מבחן לדוגמה ב: לוגיקה 88-200

מרגוליס 4

5.2.98

?

מדעים אין 85

(1)

66

1. הטענה $\{p, p\to r, r\to q\} \models p\wedge q$ נכונה

אם ורק אם הנוסחה $\alpha=$ ______________

אינה ניתנת לסיפוק. הנוסחה α שקולה

לנוסחת ה-CNF $\beta=$ ______________

רשום הכחשת רזולוציה לנוסחה β (עם סיבות):

1. ________ 5. ________

2. ________ 6. ________

3. ________ 7. ________

4. ________ 8. ________

2. יהי $\alpha=\forall x\exists y[R(x,y)\wedge R(f(x),y)]$ ויהי

$\beta=\exists y\exists x[R(x,y)\wedge R(f(x),y)]$

א) מצא אינטרפרטציה I כך ש $I(\beta)=1$

ו $I(\alpha)=0$.

ב) השתמש ברזולוציה להוכיח ש-($\alpha\to\beta$)

הוא תקף.

3. מצא מודל לפסוקים הבאים:

a) $(\forall x\exists y\exists z P(x,y,z))\wedge\forall x\forall y(P(x,x,y)\to\neg P(y,y,x))$

b) $\forall x\exists y\forall z((P(x,y)\leftrightarrow P(y,z))\wedge(P(x,y)\leftrightarrow\neg P(y,x)))$

67

לוגיקה 88-200 תשנ"ח סמ' א' מועד א'

פרופ' ארגליס

שאלון סגור

שאלון סגור

1. מה המספר של הנוסחות בלוגיקה פסוקית שאינן שקולות זו לזו עם בדיוק n משתנים?

א) n ב) $2n$ ג) 2^n ד) 2^{2^n} ה) אחרות

2. בנו נוסחה α ב-CNF ונוסחה β ב-DNF שמתאימות ללוח האמת הבא:

A	B	C	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\alpha = (A\vee B\vee \neg C)\wedge(A\vee \neg B\vee \neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee \neg C)\wedge(\neg A\vee \neg B\vee \neg C)$$

$$\beta = (\neg A\wedge \neg B\wedge \neg C)\vee(\neg A\wedge B\wedge \neg C)\vee(A\wedge \neg B\wedge \neg C)\vee(A\wedge B\wedge \neg C)$$

68

3. הטענה $\{A\to\neg(B\wedge D), \neg A\to\neg C, C, B, E\to D\}\models\neg E$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה

$\alpha=(A\to\neg(B\wedge D))\wedge(\neg A\to\neg C)\wedge C\wedge B\wedge(E\to D)\wedge E$ אינה ניתנת לסיפוק

הנוסחה α שקולה לנוסחת ה-CNF

$$B=\{\underset{C_1}{\{\neg A,\neg B,\neg D\}},\underset{C_2}{\{A,\neg C\}},\underset{C_3}{\{C\}},\underset{C_4}{\{B\}},\underset{C_5}{\{\neg E,D\}},\underset{C_6}{\{E\}}\}$$

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש-B היא סתירה.

1.	$\{A\}$	$Res_C(C_2,C_3)$
2.	$\{D\}$	$Res_E(C_5,C_6)$
3.	$\{\neg B,\neg D\}$	$Res_A(1,C_1)$
4.	$\{\neg B\}$	$Res_D(2,3)$
5.	$\square$	$Res_B(4,C_4)$
6.		
7.		
8.		

69

4. הטענה:

$$\{\forall y\exists x(R(y,x)\wedge(P(y)\leftrightarrow\neg P(x))),\ \forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z))\}\models\exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge R(x$$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה

$$\alpha=\forall y\exists x(R(y,x)\wedge(P(y)\leftrightarrow\neg P(x)))\wedge\forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z))\wedge\neg\exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge R(x$$

אינה נתנת לסיפוק.

α היא סתירה אם ורק אם הנוסחה

$$B=\{\underbrace{\{R(y,f(y))\}}_{C_1},\underbrace{\{\neg P(y),\neg P(f(y))\}}_{C_2},\underbrace{\{P(y),P(f(y))\}}_{C_3},\underbrace{\{\neg R(v,w),\neg R(w,z),R(v,z)\}}_{C_4},\underbrace{\{\neg P(t),\neg P(r),\neg R(t,r)\}}_{C_5}\}$$

בצורה אוניברסלית היא סתירה. (השתמש בסימון קבוצות.)

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש-B היא סתירה.

	פסוקית	סיבה
1.	C_1	הנחה
2.	C_2	"
3.	C_3	"
4.	C_4	"
5.	C_5	"
6.	$\{\neg R(f(m),z), R(m,z)\}$	Res(1,4) $y\mapsto m$, $v\mapsto m$, $w\mapsto f(m)$
7.	$\{R(m,f(f(m)))\}$	Res(1,6) $y\mapsto f(m)$, $z\mapsto f(f(m))$
8.	$\{\neg P(m),\neg P(f(f(m)))\}$	Res(5,7) $t\mapsto m$, $r\mapsto f(f(m))$
9.	$\{P(f(m)),\neg P(m)\}$	Res(3,8) $y\mapsto f(m)$
10.	$\{\neg P(m)\}$	Res(2,9) $y\mapsto m$
11.	$\{P(y)\}$	Res(3,9) $m\mapsto f(y)$
12.	$\square$	Res(10,11) $y\mapsto m$

70

5. תהי I אינטרפרטציה:

$U_I=\{0,1,2,\dots\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & \text{אם } x<y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $E_I(x)=\begin{cases}1 & \text{אם } x \text{ זוגי}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

$f_I(m,n)=m+n$, $u_I=5$, $v_I=2$, $w_I=0$.

מצא הערכים הבאים:

a) $I(\forall x\forall y\, P(y,f(x,y)))=$ $\underline{0}$. (אם $x=0$, מקבלים "0")

b) $I(\forall z\, P(z,f(u,z)))=$ $\underline{1}$. ($\forall z(z<5+z)$ ✓)

c) $I(\forall x\forall y[(E(x)\wedge E(y))\to E(f(x,y))])=$ $\underline{1}$. (ברור.)

d) $I(\forall x\forall y[(E(x)\wedge E(y))\to E(f(v,w))])=$ $\underline{1}$. ($v_I+w_I=2$.)

e) $I(\forall x[P(w,x)\to\exists y(P(w,y)\wedge P(y,w))])=$ $\underline{0}$. (קח $x=1$ לדוגמה)

6. מצא מודלים לנוסחאות הבאות: (ז"א מצא I כך ש...)

א) $\alpha=\forall x\exists y\exists z(P(x,y,z))\wedge\forall x\forall y(P(x,x,y)\to\neg P(y,y,x))$

$U_I=\underline{\{1,2\}}$ $P_I=$ $P_I(x,y,z)=\begin{cases}1 & \text{אם } (x,y,z)=(1,1,2) \text{ או } (x,y,z)=(2,2,1)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

ב) $\alpha=\forall x[(P(x)\leftrightarrow\neg P(f(x)))\wedge(Q(x)\leftrightarrow\neg Q(f(f(x))))\wedge\exists y(P(y)\wedge\neg Q(y))]$

$U_I=\underline{\{0,1,2,3\}}$. $f_I=$ $f_I(0)=1,\ f_I(1)=2,\ f_I(2)=3,\ f_I(3)=0$

$P_I=\dfrac{P_I(0)=P_I(2)=1}{P_I(1)=P_I(3)=0}$. $Q_I=\dfrac{Q_I(0)=Q_I(1)=1}{Q_I(2)=Q_I(3)=0}$.

27.3.97

לוגיקה מתמטית 88-200 סמ' א' מועד ב' תשנ"ז

① העבר לצורת CNF (מבלי טבלת אמת): $\ldots \wedge C) \vee \neg(C \to (D \wedge E))$

② נתונים:

$$\alpha = \forall x \exists y\ \neg p(x,y) \to p(y,x)$$

$$\beta = \forall x \exists y\ p(x,y) \vee p(y,x) \vee p(x,x)$$

א. מצא מודל סופי ל-α שאינו מודל ל-β (אם ישנו)

ב. מצא מודל סופי ל-β שאינו מודל ל-α (אם ישנו)

③ בצע סקולמיזציה על הפסוק $\neg[(\exists x\, \alpha(x)) \to \forall u \exists y \forall x\ b(u,x,y)]$

④ השתמש בשיטת DAVIS-PUTNAM כדי להוכיח תקפותו של הטיעון

$$A \vee B,\ A \to C,\ \neg(D \vee B) \models D \to (C \wedge \neg B)$$

⑤ השתמש בהוכחת רזולוציה כדי להוכיח תקפותו של הטיעון

$$\forall x \exists y\ p(x,y) \to r(x),\ \forall z\ p(f(c),z),\ \forall z\ r(f(z)) \to h(z) \models h(c)$$

ענה על כל השאלות

בהצלחה!

76 3 בס"ד

לוגיקה 88-200 תשנ"ח סמ' א' מועד א

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

שאלון סגור

שאלון סגור

1. מה המספר של הנוסחות בלוגיקה פסוקית (שאינן שקולות זו לזו) עם בדיוק n משתנים?

א) n ב) $2n$ ג) 2^n ד) 2^{2^n} ה) אחרות

2. בנו נוסחה α ב-CNF ונוסחה β ב-DNF שמתאימות ללוח האמת הבא:

A	B	C	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$\alpha =$ ______________________

$\beta =$ ______________________

#7

(2)

3. הטענה $\{A\to\neg(B\wedge D), \neg A\to\neg C, C, B, E\to D\}\models\neg E$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה

$\alpha =$ ______________ אינה ניתנת לסיפוק.

הנוסחה α שקולה לנוסחת ה-CNF

$\beta =$ ______________.

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש-β היא סתירה.

1. ______________
2. ______________
3. ______________
4. ______________
5. ______________
6. ______________
7. ______________
8. ______________

③ 78 87

4. הטענה:

$$\{\forall y \exists x (R(y,x) \land (P(y) \leftrightarrow \neg P(x))), \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \land R(y,z)) \rightarrow R(x,z))\} \models \exists x \exists y (P(x) \land P(y) \land R(x,y))$$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה:

$\alpha =$ ____________________

אינה נתנת לסיפוק.

α היא סתירה אם ורק אם הנוסחה

$B = \{$ ____________________ $\}$

בצורה אוניברסלית היא סתירה. (השתמש בסימון קבוצות.)

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש-B היא סתירה.

	סיבה	פסוקית
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		

④ ז"ע

79

5. תהי I אינטרפרטציה:

$U_I=\{0,1,2,\dots\}$, $\overset{<}{P}_I(x,y)=\begin{cases}1 & \text{אם } x<y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $E_I(x)=\begin{cases}1 & \text{אם } x \text{ זוגי}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

$f_I(m,n)=m+n$, $u_I=5$, $v_I=2$, $w_I=0$.

מצא הערכים הבאים:

a) $I(\forall x\forall y\, P(y,f(x,y)))=$ ________.

b) $I(\forall z\, P(z,f(u,z)))=$ ________.

c) $I(\forall x\forall y[(E(x)\wedge E(y))\to E(f(x,y))])=$ ________.

d) $I(\forall x\forall y[(E(x)\wedge E(y))\to E(f(v,w))])=$ ________.

e) $I(\forall x[P(w,x)\to\exists y(P(w,y)\wedge P(y,w))])=$ ________.

6. מצא מודלים סופיים לנוסחאות הבאות: (ז"א מצא I כך ש

א) $\alpha=\forall x\exists y\exists z(f(x,y,z))\wedge\forall x\forall y(P(x,x,y)\to\neg P(y,y,x))$

$U_I=$ ________ $P_I=$ ________

ב) $\alpha=\forall x[(P(x)\leftrightarrow\neg P(f(x)))\wedge(Q(x)\leftrightarrow\neg Q(f(f(x))))\wedge\exists y(f(y)\wedge\neg Q(y))]$

$U_I=$ ________. $f_I=$ ________.

$P_I=$ ________. $Q_I=$ ________.

בס"ד

80

לוגיקה מתמטית 88-200 סמ' א' מועד ב'

ט"ד 85 שבולון סגור שעתיים

ק3 ז מתוך 5

1) התבונן בקשר הבינרי $A|B$ המוגדר על ידי טבלת האמת הבאה:

A	B	$A\|B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

א) הוכח ש $\neg A$ שקולה ל $A|A$.

5 נק'

ב) הוכח ש $A\wedge B$ שקולה ל $\neg(A|B)$.

5 נק'

ג) הוכח ללא שימוש בטבלת אמת ש $A\wedge B$ שקולה ל $(A|B)|(A|B)$.

5 נק'

81

~~8~~

דף במיון 5

ד) לכל נוסחה α בלוגיקה פסוקית, קיימת נוסחה B הבנויה רק עם הקשר $|$ כך ש α שקולה ל B.

5 נק'

נכון/לא נכון

ה) לכל נוסחה α בלוגיקה פסוקית קיימת נוסחה B הבנויה רק עם הקשרים $\{\wedge,\vee\}$ כך ש α שקולה ל B.

5 נק'

נכון/לא נכון

82

ק3 3 סמין 5

2) מצאו נוסחה α ב-CNF השקולה לנוסחה:

$$(A \leftrightarrow (B \rightarrow C)) \wedge (A \leftrightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow \neg C).$$

א) $\alpha =$ ____________________

סנק'

ב) השתמש ברזולוציה להוכיח ש-α היא סתירה.

צנק'

פסוקית	סיבה
1)	
2)	
3)	
4)	
5)	
6)	
7)	
8)	
9)	
10)	
11)	
12)	
13)	
14)	

t) ℓ3 83 4 מטיך 5

3) התבונן בנוסחה:

$$\alpha = (\forall y \exists x (T(y,x) \wedge E(y) \leftrightarrow \neg E(x)) \wedge$$
$$\forall x \forall y \forall z ((T(x,y) \wedge T(y,z)) \rightarrow T(x,z)) \wedge$$
$$\forall x \neg \exists y (E(x) \wedge E(y) \wedge T(x,y))).$$

א) מצא קבוצת פסוקיות B כך ש α שקולה ל B. 3נק'

$B = \{ \qquad \}$

ב) השתמש ברזולוציה להוכיח ש B היא סתירה. 7נק'

	פסוקית	סיבה
1)		
2)		
3)		
4)		
5)		
6)		
7)		
8)		
9)		
10)		
11)		
12)		

★ 5 מתוך 5 84

5. מיין את הנוסחאות הבאות כ (i) תקפה (ii) סתירה (iii) אחרת

א) $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \wedge \exists x \exists y (\neg P(x) \wedge \neg Q(y))$ — 5 נק'

תקפה / סתירה / אחרת

ב) $(\neg \exists x \exists y P(x,y)) \vee (\forall x P(x,x))$ — 5 נק'

תקפה / סתירה / אחרת

ג) $(\neg \exists x P(x,x)) \vee (\forall x \forall y P(x,y))$ — 5 נק'

תקפה / סתירה / אחרת

ד) $(\forall x P(x,x)) \wedge (\exists x \forall y (P(x,y) \wedge \neg P(y,x)))$ — 5 נק'

תקפה / סתירה / אחרת

ה) $\forall x P(x,x) \wedge \forall y \exists x (P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$ — 5 נק'

תקפה / סתירה / אחרת

') יהי A הפסוק (ליתר דיוק קבוצת הקלוזים (*clauses* , פסקיות))
$\{\{S,U\},\{\neg S,V\},\{\neg V,W,X\},\{\neg W\},\{\neg U\},\{U,\neg X\}\}$.

ארך הפרכת הרזולוציה (=הכחשת הרזולוציה) הקצרה ביותר של A > 10 . שימו לב:
ארך זה הוא הארך הקטן ביותר של סדרה של קלוזים שכל אחד מהם הוא או קלוז מקורי או מתקבל מקלוזים קודמים בסדרה בתהליך הרזולוציה, והקלוז האחרון הוא המראה את ההפרכה.

) הפסוק הנתון נתן לספוק.

'אף לא אחת מבין התשובות האחרות נכונה.

) קיַמת תת קבוצה אמתית B של קבוצת הקלוזים הנתונה שהיא אינה נתנת לספוק.

') יהי S הפסוק $\exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x))$ באשר $P(x)$ היא נוסחה בה רק המשתנה x רשאי להיות חפשי.

תקף כי כל פֵרוש (=אינטרפרטציה) הוא בעל עולם (יְקום, *universe*) לא ריק.

) S תקף כי כל פֵרוש (=אינטרפרטציה) הוא בעל עולם (יְקום, *universe*) לא ריק.

') S אינו תקף כי בנוסחה $P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ x עלול היות חפשי במופע השמאלי של $P(x)$ וקשור (=ללא מופע חפשי) בְ $\forall x P(x)$.

') S תקף כי הוא שקול לוגית לפסוק $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$.

) S אינו תקף כי יש פֵרושים (=אינטֶרפרֶטציות) שאינם מספקים את $\forall x P(x)$.

') הגדרה:נוסחות C,D מסֵדר ראשון נקראות שקולות- s אם: C נתֶנת לספוק אם ורק אם D נתֶנת לספוק.

יהיו A,B נוסחות מסדר ראשון.

') $\exists x A \wedge B$ שקולה- s לְ $\exists x(A \wedge B)$ אך הן אינן שקולות טאוטולוגית זו לזו

) $\exists x A \wedge B$ שקולה טאוטולוגית לְ $\exists x(A \wedge B)$.

) אם x אינו חפשי בְ A אז $\exists x A \wedge B$ שקולה- s לְ $\exists x(A \wedge B)$.

') אם x אינו חפשי בְ B אז $\exists x A \wedge B$ שקולה טאוטולוגית לְ $\exists x(A \wedge B)$.

) תהי F נוסחה כוללת (=אוניברסלית) מסדר ראשון שאין בה סמלי פונקציות.
נסמן בְ I את "עולם Herbrand של F הוא סופי".
נסמן בְ II את " הקבוצה $\mathrm{Res}^*(F)$ עשויה להיות אינסופית". (חלק מכם אולי רגיל לסימון $\mathrm{Res}_*(F)$ או לסימון $\mathrm{Res}_\infty(F)$ ...).
נסמן בְ III את " קיָם אלגוריתם הבודק האם F נתֶנת לספוק".

') I,III נכונות (במקרה שלנו).

) רק II נכונה.

) II נכונה וְ III אינה נכונה (במקרה שלנו).

) רק I נכונה.

) יהיו A נוסחה מסדר ראשון, D קבוצת נוסחות מסדר ראשון כך שכל תת קבוצה סופית של D נִתנת לסִפּוּק.

) או כל תת קבוצה סופית של $D \cup \{A\}$ נִתנת לסִפּוּק או כל תת קבוצה סופית של $D \cup \{\neg A\}$ נִתֶּנת לסִפּוּק. .

) אם A וכל אברי D הם פסוקים כוללים (=אוניברסליים) אז
או כל תת קבוצה סופית של $D \cup \{A\}$ נִתנת לסִפּוּק או כל תת קבוצה סופית של $D \cup \{\neg A\}$ נִתֶּנת לסִפּוּק,
אבל אין זה נכון במקרה הכללי.

) אם A וכל אברי D הם נוסחות אטומיות ללא משתנים אז
או כל תת קבוצה סופית של $D \cup \{A\}$ נִתנת לסִפּוּק או כל תת קבוצה סופית של $D \cup \{\neg A\}$ נִתֶּנת לסִפּוּק.
אבל אין זה נכון במקרה הכללי.

) אם בְּ A מופיע סמל פונקציה אז יש מקרים בהם קַיָּמות תת קבוצות סופיות, האחת של $D \cup \{A\}$ והשניה של $D \cup \{\neg A\}$, ששתיהן אינן נִתָּנות לסִפּוּק.

) יהי A הפסוק

$$\forall x \forall y \left(\begin{array}{r} (\neg P(x) \vee \neg P(f(x)) \vee R(y)) \wedge (\neg P(h(c,x)) \vee \neg R(f(f(c)))) \\ \wedge\, P(y) \wedge R(f(c)) \end{array} \right)$$

באשר c קבוע, f,h סמלי פונקציות, P,R סמלי יחסים (=סמלי פרֶדיקָטים).

) הפסוק A נִתָּן לסִפּוּק.

) כל הפרכת רזולוציה (=הכחשת רזולוציה) של A חַיֶּבת לנצל את **כל** הקלוזים (המקוריים) בעלי אבר יחיד, ויש הפרכת רזולוציה של A .

) קַיֶּמת הפרכת רזולוציה (=הכחשת רזולוציה) של A שאינה מנצלת את כל הקלוזים (המקוריים) בעלי אבר יחיד.

) אף לא אחת מבין התשובות האחרות נכונה.

ב ה צ ל ח ה

לוגיקה 88-200 תשנ"ו סמ' א מועד ב' ד"ר משה קופל

1. לכל אחת מהנוסחאות הבאות קבע אם הנוסחה:
א) טאוטולוגיה ב) סתירה ג) אף אחת מהנ"ל

i. $[P \to (P \to Q)] \to (P \to Q)$ ii. $P \to (\neg P \to Q)$ iii. $\neg R \to (P \wedge \neg P)$

2. השתמש בשיטת DAVIS-PUTNAM כדי להוכיח שהטענה הבאה נכונה:

$$P \to Q,\ R \vee \neg Q,\ \neg(P \wedge R) \models \neg P$$

3. השלם את משפט HERBRAND: הפסוק האוניברסלי $\forall b_1 \forall b_2 \dots \forall b_n\ \alpha(b_1,\dots,b_n)$ ניתן לסיפוק אם ורק אם ______.

4. נתון בטענה $\forall x \exists y\ p(x,y) \models \exists y \forall x\ p(x,y)$.

א. הטענה נכונה אם ורק אם הפסוק $\alpha = ?$ ______ אינו ניתן לסיפוק.

ב. מצא את הסקולמיזציה של α והעבר אותו לצורה פסוקית, β.

ג. אם β אינו ניתן לסיפוק הראה הוכחת רזולוציה

ד. אם β ניתן לסיפוק מצא מודל לצד שמאל של הטענה המקורית שאינו מודל לצד ימין של הטענה.

5. כמו שאלה 4 עבור הטענה $\exists y \forall x\ p(x,y) \models \forall x \exists y\ p(x,y)$

3ל 1 מועד ב

29.6.88

בחינה בלוגיקה מתמטית - ט'

זמן הבחינה: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר (ספרים, מחברות וכו').
יש לענות על שלוש מחמש השאלות הבאות.

1. א) מצא נוסחה בצורה פרנקסית נורמלית השקולה לוגית לנוסחה הבאה:

$$\forall v_1 (v_1 < v_2 \to v_1 < v_3) \leftrightarrow \sim (v_3 < v_2).$$

ב) קבע אם הנוסחה הבאה תקפה לוגית. התשובה צריכה להיות מנומקת.

$$(v_1 = v_3 \vee v_1 = v_4) \wedge (v_2 = v_3 \vee v_2 = v_4) \wedge v_1 \neq v_2$$
$$\to v_1 \cdot (1 + v_2) = v_3 \cdot (1 + v_4).$$

2. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות. בכל סעיף יש לנמק בקצרה או להביא דוגמה נגדית. [מדובר בנוסחאות של השפה מסדר ראשון L עם הסמלים הלא-לוגיים 0, 1, −, +, ·, < ובמודלים לשפה זו.]

א) כל נוסחה שקולה לוגית לפסוק.

ב) כל נוסחה שקולה לוגית לנוסחה שבה שום משתנה L חופשי וגם קשור.

ג) כל שני מודלים שקולים אלמנטרית הם איזומורפיים.

ד) כל שני מודלים שקולים אלמנטרית בני מניה הם איזומורפיים.

3. תהי L_0 השפה מסדר ראשון בלי סמלים לא לוגיים (הנוסחאות האטומיות היחידות של L_0 הן מהצורה $x=y$ כש- x, y משתנים). מודל $\mathfrak{M}$ לשפה L_0 נקבע לחלוטין ע"י קבוצה לא ריקה M שהיא קבוצת האברים שלו, ונכתב $\mathfrak{M} = \langle M \rangle$.

א) להראות שכל שני מודלים אינסופיים לשפה L_0 הם שקולים אלמנטרית.

(המשך בעמוד הבא.)

3 3

גל במועד 2
לוגיקה מתמטית
29.6.88 — תמוז 2 —

18 -

[רמז: שימוש במשפטי לוונהיים – סקולם. מה אפשר לומר על שני מודלים לשפה L_0 שהם בעלי אותה עוצמה?]

ב) להראות שלא קיים פסוק A בשפה L_0 שאמיתי בכל מודל סופי בעל מספר זוגי של איברים ושקרי בכל מודל סופי בעל מספר אי-זוגי של איברים.
[רמז: מעבר למודלים אינסופיים בעזרת משפט הקומפקטיות.]

4. תהי L_1 השפה מסדר ראשון עם הסמלים הלא לוגיים $+, 0, -$ ("שפת החבורות האבליות").

א) האם קיים פסוק של L_1 אשר המודלים שלו הם בדיוק החבורות האבליות (קומוטטיביות, חילופיות) שיש בהן איבר מסדר 2? אם לא, האם קיימת קבוצת פסוקים של L_1 אשר אלה בדיוק המודלים שלה?

ב) אותה שאלה על חבורות ציקליות (במקום "חבורות אבליות שיש בהן איבר מסדר 2").

ג) אותה שאלה על חבורות אבליות אינסופיות.

5. בהרצאה הגדרנו את $s[t/x]$, $A[t/x]$ ("תוצאות ההצבה של הביטוי t עבור המשתנה x בביטוי s או בנוסחה A") באינדוקציה על המבנה של s ושל A כאשר t היה ביטוי סגור (ביטוי ללא משתנים), ולמקרה זה הוכחנו את למת ההצבה המאפשרת לקבוע את ערך האמת של $A[t/x]$ בהשמה מסוימת על פי ערך האמת של A בהשמה אחרת לאותו מודל.
נשלים כעת בהגדרת $A[t/x]$ את הסעיף המטפל באפשרות ש-A מהצורה $\exists y B$ כש-y משתנה שונה מ-x. במקרה זה, אם y אינו מופיע ב-t תהי $A[t/x]$ הנוסחה $\exists y B[t/x]$; ואם y מופיע ב-t יהי z המשתנה הראשון שאינו חופשי ב-B, שונה מ-x ואינו מופיע ב-t ותהי $B' = B[z/y]$ ואז $A[t/x]$ תהיה הנוסחה $\exists z B'[t/x]$.
הראה כיצד ניתן לאחר שינוי זה בהגדרה לנסח ולהוכיח את למת

[redacted]

4

לוגיקה מתמטית 1 - 88-200-07 - מועד א' תשנ"ה

המרצה: פרופ' אמיר

משך הבחינה: שעתיים

מותר להעזר במחברות

ועדת המשמעת מזהירה
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

(נק') 1. הראה אם הנוסחה הבאה טאוטולוגיה או לא.

$$(((A\wedge B)\supset C)\vee(C\vee\sim B\vee\sim A))\supset(((((A\supset B)\wedge B)\supset A)\vee\sim D)\supset B)$$

(נק') 2. ענה רק אמת או שקר. (כל שאלה שוה 3 נקודות).

א. אם A ניתנת למניה רקורסיבית אז A כריעה.
ב. אם A כריעה אז $\bar{A}$ ניתנת למניה רקורסיבית.
ג. אם A כריעה אז $\bar{A}$ כריעה.
ד. אם A ניתנת למניה רקורסיבית אז $\bar{A}$ ניתנת למניה רקורסיבית.
ה. אם A ניתנת למניה רקורסיבית ; $\bar{A}$ ניתנת למניה רקורסיבית אז A כריעה.

(נק') 3. מה המשתנים החופשיים של הנוסחה $\forall x\forall y(\forall z A(x,y,z))\supset B(x,y,z))$

(נק') 4. האם $f(a_1,a_2,x_1,x_2)$ חופשי ל-x_3 בנוסחה הבאה:

$$(\forall x_3\forall x_1(A(x_3,a_1)))\vee(B(x_1,x_2)\supset\forall x_3 C(x_2))$$

(נק') 5. הוכח ש- $\vdash_K(\forall x\forall y A(x,y))\supset(\forall x A(x,x))$
(ההוכחה ללא שימוש במשפט השלמות).

(נק') 6. נגדיר כאת 0-מקומי $\perp$ שערכו F בכל פונקצית אמת. האם $\{\supset,\perp\}$ שלמה פונקציונלית? מדוע?

(נק') 7. עבור אילו איברים מהתחום מקבלת הנוסחה $\forall x\forall y A_1^2(f_1^2(x,z),y)$ ערך אמת T בהשמה

$D=\{a,b\}$ $\quad f_1^2(x,y)=y$ $\quad A_1^2(x,y)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$

(נק') 8. נגדיר $D=\{x\mid x \text{ בן אדם}\}$ $\quad B=\{x\mid x \text{ סֵפֶר}\}$

$S(x,y)=\{\langle x,y\rangle\mid x \text{ מְסַפֵּר את } y\}$

כתוב פסוק בתחשיב הפרדיקטים שאומר: "לא קיים ספר שמספר בדיוק את אותם בני אדם שלא מספרים את עצמם".

בהצלחה.