3.9.87

38

לוגיקה מתמטית   סמסטר ב' מועד ב' תשמ"ז   ד"ר משה קופ

לכל אחת מהשאלות בחר תשובה אחת. הצדק את תשובתך.
אפשר להסתמך על כל המשפטים שלמדנו בכתה.

1. טענה I: אם Σ היא קבוצה (סופית או לא סופית) ניתנת להכרעה של נוסחות בלוגיקה פסוקית אז הקבוצה $S=\{\alpha \mid \Sigma \models \alpha\}$ ניתנת להכרעה
טענה II: אם Σ כנ"ל אז קיימת Σ_0 סופית כך ש $S=\{\alpha \mid \Sigma_0 \models \alpha\}$
א) רק טענה I אמיתית   ב) רק טענה II אמיתית
ג) שתי הטענות אמיתיות   ד) שתי הטענות שקריות

2. אמיתות הנוסחה $\forall x\{x \neq y \rightarrow \exists y[P(x,y) \wedge P(y,x)]\}$ תלויה
א) במבנה ובהשמה   ב) רק במבנה   ג) רק בהשמה
ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

3. I: קבוצת המבנים K היא EC II: $Th\,K$ ניתנת לאקסיומטיזציה סופית
א) I גורר II אבל II לא גורר I   ב) II גורר I אבל I לא גורר II
ג) I אם ורק אם II   ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

4. יהי N המספרים הטבעיים. יהי $\cdot$ הכפלה. יהי E הזוגיים ויהי P הראשוניים
א) E ניתנת להגדרה במבנה $\langle N,\cdot\rangle$ אבל P אינה ניתנת להגדרה ב $\langle N,\cdot\rangle$
ב) P " E "
ג) E ו P ניתנות להגדרה ב $\langle N,\cdot\rangle$ ד) E ו P אינן ניתנות להגדרה ב $\langle N,\cdot\rangle$

5. יהי T תורה לא שלמה כך שכל המודלים של T בעוצמה $\aleph_0$ הם איזומורפיים.
א) אז ל T אין מודל סופי   ב) אז ל T יש מודל סופי אחד ויחיד
ג) אז ל T יש יותר ממודל סופי אחד   ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

39

3.9.87

המשך

6. תהי T תורה שלמה (בשפה L). תהי T קבוצה לא נתנת להכרעה.
תהי Σ תת-קבוצה נתנת להכרעה של T. אז

א) $C_n \Sigma$ אינה שלמה (בשפה L)

ב) $C_n \Sigma$ אינה נתנת להכרעה

ג) $C_n \Sigma$ נתנת להכרעה

ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

26.3.89 **40**

88 - תשמ"ט - 01

-40-

בחינה בלוגיקה מתמטית

סימסטר א', מועד ב'

זמן הבחינה: שעתיים.

יש לענות על שלוש מתוך 5 השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח:

א) שלמות מבחינת כוח ההבעה של שפה פסוקית.

ב) נוסחה בצורה דיסיונקטיבית (בשפה פסוקית עם הקשרים $t, f, \sim, \wedge, \vee$).

ג) תוצאה לוגית (של קבוצת נוסחאות נתונה).

2. תהי L שפה פסוקית שקבוצת האטומים שלה A היא אינסופית. תהי Γ קבוצת נוסחאות של L. האם יתכן שיש בדיוק מודל אחד לשפה L שאינו מודל של Γ? תן דוגמה, או הסבר מדוע לא יתכן מצב כזה.

3. א) תהי L שפה פסוקית עם אטום אחד לפחות ועם הקשרים $\vee, \dot{\vee}$ (דיסיונקציה רגילה ודיסיונקציה מוציאה) בלבד. להראות ש-L אינה שלמה מבחינת כוח ההבעה. [רמז: התבונן במודל שבו כל האטומים שקריים.]

ב) תהי L' שפה פסוקית עם הקשרים $\vee, \dot{\vee}, t$. הראה ש-L' שלמה מבחינת כוח ההבעה. [רמז: מצא דרך לבטא שלילה.]

4. א) מצא נוסחה בצורה דיסיונקטיבית השקולה לוגית לנוסחה $r \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

ב) הוכח שהנוסחה שמצאת מינימלית הן מבחינת מספר הדיסיונקטים וכן מבחינת מספר הקוניונקטים בכל דיסיונקט.

5. נגדיר גרף לא מכוון סופי (בקיצור - גרף) כזוג $G=(V,E)$ כאשר V קבוצה, שאבריה נקראים קדקדי הגרף, E קבוצה שאבריה זוגות לא סדורים $\{x,y\}$ של קדקדים. אברי E נקראים הקשתות של הגרף. אם $\{x,y\}\in E$ נאמר ש-x, y קדקדים שכנים ב-G.
תת-גרף של G הוא גרף $G'=(V',E')$ שבו $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$.
צביעה של גרף G ב-k צבעים היא פונקציה $f: V \to \{1,\ldots,k\}$ כך שאם x, y קדקדים שכנים ב-G אז $f(x)\neq f(y)$.

29.4.88 מועד ד' לוגיקה מתמטית I

88-371-01

41

דף 1 מתוך 2

זמן הבחינה: שעתיים.

מותר להשתמש בכל חומר עזר.

נא לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. תן הוכחה או הפרך ע"י דוגמה נגדית כל אחת מארבע הטענות הבאות:

א) לכל שפה פסוקית בעלת מספר סופי של אטומים קיים קבוע K כך שכל נוסחה בשפה שקולה לוגית לנוסחה באורך קטן מ- K. (מדובר כאן בשפות פסוקיות הכוללות את כל הקשרים הסטנדרטיים.)

ב) אם הנוסחה A היא תוצאה לוגית של קבוצת הנוסחאות Γ אז $\Gamma\cup\{A\}$ ספיקה.

ג) אם האוסף $\mathcal{C}$ של קבוצות של נוסחאות הוא תכונת קיימות ואם $\Gamma\in\mathcal{C}$, $(p\vee q)\in\Gamma$ אז $p\in\Gamma$ או $q\in\Gamma$.

ד) הפסוק

$$\forall v_1\,\exists v_2\,\forall v_3\,\left((v_1=v_2\cdot v_2)\vee(v_1\neq v_3\cdot v_3)\right)$$

אמיתי בממשיים. [$s\neq t$ הוא קיצור ל- $\sim(s=t)$.]

2. תהי L שפה פסוקית (עם כל הקשרים הסטנדרטיים). נתבונן במערכת הבאה של אקסיומות וכללים להוכחת נוסחאות של L מתוך הנחות:

האקסיומות הן כל הטאוטולוגיות;

וכלל ההסק היחיד הוא כלל הניתוק (מתוך A, $A\to B$ הסק את B).

עבור קבוצת נוסחאות Γ ונוסחה A נסמן $\Gamma\vdash A$ כאשר קיימת במערכת זו הוכחה של A מתוך Γ (דהיינו, קיימת סדרת נוסחאות $B_1,\dots,B_n$ שכל אחת מהן

ב"ת 3 במבוא 2 ללוגיקה מתמטית — 2 — ~~[illegible]~~ מוז

הוא אבר של Γ או טאוטולוגיה או נגזרת משתים מקודמותיה ע"י כלל הניתוק, והנוסחה האחרונה בסדרה B_n היא A).

29.4.88

42

א) להוכיח את "משפט הנכונות":
אם $\Gamma \vdash A$ אז A תוצאה לוגית של Γ.

ב) להוכיח את "משפט השלמות החזק":
אם A תוצאה לוגית של Γ אז $\Gamma \vdash A$.

[רמז ל-(ב): הראה תחילה שאם A תוצאה לוגית של Γ אז קיימות נוסחאות $C_1,\dots,C_n$ ב-Γ ($n \geq 0$) כך שהנוסחה

$$(C_1 \to (C_2 \to \dots \to (C_n \to A)\dots))$$

היא טאוטולוגיה.]

3. מצא את כל לוחות האמת האפשריים של נוסחה הנבנית ~~[illegible]~~ מהאטומים p, q באמצעות הקשר $\leftrightarrow$ בלבד.

4. תהי L שפה פסוקית עם הקשרים f, $\sim$, $\vee$ בלבד ויהי $\mathcal{C}$ אוסף של קבוצות נוסחאות של L. נניח —

א) $\mathcal{C}$ תכונה סופית;

ב) לכל קבוצת נוסחאות Γ:
$\Gamma \in \mathcal{C}$ אמ"ם כל תת-קבוצה סופית של Γ שייכת ל-$\mathcal{C}$.

הוכח שכל קבוצה השייכת ל-$\mathcal{C}$ היא ספיקה.

[רמז: השווה להוכחת משפט הקומפקטיות ...

5. נסתכל בשפה מסדר ראשון עם הקבועים 0, 1, סמלי הפונקציות $-, +, \cdot$ וסמל השוויון (=) וכן המשתנים, הקשרים והכמתים הרגילים. [שים לב שהסמל $<$ איננו בשפה.]

א) מצא נוסחה בשפה זו, במשתנה החופשי היחיד v_1, המגדירה בשדה הממשים את קבוצת המספרים החיוביים. [כלומר לכל ממשי a: הנוסחה אמיתית בהצבה $a \mapsto v_1$ אם״ם $0<a$.]

ב) אותה שאלה עבור שדה המספרים הרציונליים במקום שדה המספרים הממשיים.

[רמז ל-(ב): ידוע שכל מספר שלם חיובי הוא סכום 4 רבועים. כל מספר רציונלי חיובי הוא מנה של שני מים חיוביים.]

בהצלחה

ב3 1 מועד ב

44 גמל' ו/או סימון (נ) להדפיס

~~1. Compactness in propositional~~
~~1. Sentence true in which structures, assignments~~ $(\forall y\, P(x,y)) \to (\exists x\, P(x,y))$
~~2. Rels def in structure~~ ~~$\langle Z, +, <\rangle$~~
~~3. Set of models EC, EC_Δ~~
~~4. Completeness~~
~~5. Arith LST~~ ~~Th $\langle R,<\rangle$ every card but not fin.~~ ~~A decidable~~ ~~$\aleph_0$-categorical~~
~~6. LS / Vaught — decidable~~ ~~A has no finite models~~ ~~A decidable~~
~~– Gödel (r.e.)~~

לוגיקה מתמטית מועד א' סמ' ב' תשמ"ג ד"ר משה קופל
342-01

1. אמיתות הנוסח $(\forall y\ P(x,y)) \to (\exists x\ P(x,y))$

א. תלויה במבנה ובהשמה
ב. תלויה במבנה לבד
ג. תלויה בהשמה לבד
ד. לא תלויה במבנה או בהשמה

2. יהי $\mathfrak{U}$ המבנה $\langle R,+,<\rangle$ כאשר R מסמן את הממשיים ו $<,+$ הם כרגיל. יהי R^+ הממשיים החיוביים ויהי Z השלמים.

א. R^+ ו Z ניתנים להגדרה ב $\mathfrak{U}$
ב. R^+ ניתן להגדרה ב $\mathfrak{U}$ אבל Z לא ניתן להגדרה ב $\mathfrak{U}$
ג. Z " R^+ "
ד. R^+ ו Z אינן ניתנים להגדרה ב $\mathfrak{U}$

45

דף במבחן ב

לוגיקה מתמטית

מועד א׳ סמ׳ ב׳

תשמ״ט

(3) יהי M אוסף כל המבנים הלא סופיים

א. M הוא EC

ב. M הוא EC_Δ (במובן הרחב) אבל לא EC

ג. M אינו EC_Δ

(4) "אם לקבוצת פסוקים Σ ~~אין~~ לא קיים פסוק α כך ש $\Sigma \vdash_D \alpha$; $\Sigma \vdash_D \neg\alpha$ אז Σ ניתנת לסיפוק"

א. זה נכון לכל מערכת היסק D שלמה (אבל לא לכל מערכת היסק)

ב. זה נכון לכל מערכת היסק D נאותה "

ג. זה לא נכון לשום מערכת היסק D

ד. זה נכון לכל מערכת היסק D

(5) יהי $\mathfrak{U}$ המבנה משאלה 2. אז לקבוצת הפסוקים ~~$Th(\mathfrak{U})$~~ $\mathfrak{U}$

א. יש מודל בן-מניה אבל אין מודל סופי

ב. יש מודל סופי אבל אין מודל לא סופי בן-מניה

ג. אין מודל בן-מניה (כולל סופי)

ד. יש מודל סופי ויש מודל לא-סופי בן-מניה

(6) תהי A קבוצת פסוקים ~~סופית~~ ניתנת להכרעה כך ש (i) ל A אין מודלים סופיים (ii) A $\aleph_0$-קטגורית אז

א. $C_n A$ תורה ניתנת להכרעה

ב. $C_n A$ תורה ניתנת למניה רקורסיבית אבל לא להכרעה

ג. $C_n A$ תורה אינה ניתנת למניה רקורסיבית

ד. $C_n A$ אינה תורה

הבא מעבר לדף

-46

ד. שרה: יש לי אלגוריתם ~~למצוא~~ (לספור) כל הפסוקים האמיתיים בתורת המספרים

חיים: יש לי אלגוריתם לבדוק אם פסוק אמת בתורת המספרים

א. שרה וחיים משקרים

ב. חיים משקר, שרה לא בהכרח משקרת

ג. שרה משקרת, חיים לא בהכרח משקר

ד. שניהם לא בהכרח משקרים

45

25.3.90 בחינה בלוגיקה מתמטית I מועד ב', תש"ן

88-571

זמן הבחינה: שעתיים.

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות. 96

1. א) להגדיר מהי מערכת אלגברית שלמה מבחינת כוח הביטוי.

ב) להגדיר מתי נוסחה φ היא תוצאה לוגית של קבוצת נוסחאות Γ (בשפה פסוקית כלשהי).

2. תהי L שפה פסוקית בעלת n ~~[illegible]~~ פסוקים אטומיים $p_1, \ldots, p_n$ (כלומר הוכח שאם נוסחה φ של L היא תוצאה לוגית של קבוצת נוסחאות Γ אז יש תת-קבוצה Δ של Γ שמספר איבריה אינו עולה על 2^{2^n} וכך ש-φ תוצאה לוגית של Δ.

[רמז: לכל מודל M שבו φ שקרי בחר נוסחה ב-Γ השקרית באותו מודל.]

3. להוכיח שבשפה פסוקית עם הקשרים $\vee, \wedge, \pounds, \underline{t}$ בלבד אין נוסחה המבטאת את פונקציית השלילה Not (אפשר להניח שיש בשפה פסוק אטומי יחיד p).

[רמז: דרך אחת היא להראות שכל נוסחה בשפה מבטאת אחת מ-3 פונקציות האמת האחדות של משתנה אחד, ע"י אינדוקציה על מבנה הנוסחה

4. תהי L שפה פסוקית ויהיו Γ, Δ קבוצות של נוסחאות מ-L. נסמן $\Gamma \models \Delta$ כאשר בכל מודל M לשפה שבו כל הנוסחאות ב-Γ אמיתיות לפחות אחת מהנוסחאות ב-Δ אמיתית.

להוכיח ש-$\Gamma \models \Delta$ אם"ם קיימות תת-קבוצות סופיות Γ_1 של Γ ו-Δ_1 של Δ כך ש-$\Gamma_1 \models \Delta_1$.

[רמז: כיוון אחד קל מההגדרה והשני מתבסס על משפט הקומפקטיות לקבוצת פסוקים מסוימת Z הנבנית מ-Γ, Δ. לבניית Z יש להבין שקשר השלילה מצוי בשפה. מדוע הנחה זו מותרת?]

47

ג' במועד ב

בחינה בלוגיקה, [illegible] 25.3.90

5. תהי A קבוצה ויהי $R \subseteq A^3$. נסמן $[a,b,c]$ במקום $R(a,b,c)$ (או $(a,b,c) \in R$). R יקרא סידור מעגלי (מכוון) של A כאשר מתקיימים התנאים הבאים:

א) אם $[a,b,c]$ אז $a \neq b$.

ב) אם $[a,b,c]$ אז $[b,c,a]$.

ג) אם a,b,c שלושה איברים שונים של A אז $[a,b,c]$ או $[a,c,b]$.

ד) אם $[a,b,c]$ וגם $[a,c,d]$ אז $[a,b,d]$.

[דוגמא: $A = \{1,\dots,12\}$. היחס $[a,b,c]$ מתקיים אם"ם a,b,c שונים ובחוג השעות של שעון תקין, לאחר שיוצאים את השעה a, יגיעו לשעה b לפני שיגיעו לשעה c. למשל, $[1,3,5]$, $[7,11,2]$, $[9,3,8]$ אבל לא $[9,3,10]$.]

להוכיח שלכל קבוצה A קיים סידור מעגלי.

[רמז: השתמש בעובדה ש- A ניתנת לסידור ליניארי או במשפט הקומפקטיות של שפה פסוקית מתאימה.]

בהצלחה

88-521-01

6.2.89

48

בחינה בלוגיקה מתמטית I מועד א', תש"ן

דף 1 מתוך 2

זמן הבחינה: שעתיים.

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח:

א) מתי נאמר שפונקציה $f:A^n\to A$ ניתנת לביטוי במערכת אלגברית $\mathfrak{A}=\langle A,(G_i)_{i\in I}\rangle$.

ב) משפט הקומפקטיות, בניסוח המדבר על תוצאות לוגיות („ניסוח ב'").

2. א) תהי $\mathfrak{A}=\langle A,(G_i)_{i\in I}\rangle$ מערכת אלגברית ותהי C תת-קבוצה של A סגורה תחת כל הפעולות G_i ($i\in I$). הוכח: אם t ביטוי (במערכת ביטויים מהטיפוס המתאים ל- $\mathfrak{A}$) ו- α השמה שערכיה ב- C אז $\|t\|_{\mathfrak{A},\alpha}\in C$.

ב) להראות שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}x$ ($x\in\mathbb{R}$) אינה ניתנת לביטוי במערכת $\mathfrak{R}=\langle \mathbb{R};+,0,-,*,1\rangle$ (שדה הממשיים).
[רמז: תהי C קבוצת המספרים השלמים. השתמש ב-(א) ובהגדרת פונקציה ניתנת לביטוי.]

3. תהי L שפה פסוקית עם הפסוקים האטומיים p,q,r וקשרים $\to,\vee,\wedge,\sim$ (לפחות). להראות שהנוסחה

$$(p\to q)\wedge(\sim p\to r)$$

אינה שקולה לוגית לשום נוסחה הבנויה מ- p,q,r באמצעות הקשרים $\wedge,\vee$ בלבד, אבל שקולה לוגית לנוסחה הבנויה מהם באמצעות $\to,\vee,\wedge$ בלבד.

[רמז: הנוסחה הנתונה אמיתית במודל

p	q	r
0	0	1

ושקרית במודל המתקבל ממנו ע"י שינוי הערך של p מ- 0 ל- 1. הראה שבנוסחאות הבנויות ע"י $\wedge,\vee$ בלבד התנהגות כזאת לא תתכן.]

4. תהי L שפה פסוקית עם קשר השלילה ($\sim$) לפחות ונסמן ב- Γ, Δ קבוצות של פסוקים מ- L. נסמן $\models\Delta$ (קרי: „Δ תקפה במובן האיחודי (או הרחב)") כאשר בכל מודל M לשפה לפחות אחד מהפסוקים ב- Δ אמיתי. להוכיח בקצרה:

~~[illegible]~~ — לוגיקה, מועד 2 — ף3 במקום 2

לוגיקה מתמטית

14en

6-2.89

5. יהי A קבוצה כלשהי, $f: A \to R$ (R קבוצת המספרים הממשיים). להוכיח שקיים סידור ליניארי $<$ של A כך שלכל שני איברים a, b של A:

$$f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$$

($<$ שבאגף שמאל הוא הסדר הרגיל של הממשיים).

[<u>הערה:</u> אפשר, אם כי לא הכרחי, להעזר במשפט הקומפקטיות ללוגיקה פסוקית. מי שמעדיף לא להעזר בו רשאי להסתמך על העובדה שכל קבוצה ניתנת לסידור ליניארי.]

בהצלחה

לוגיקה 88-200 ד"ר משה קופל תשנ"ג סמסטר א' מועד א'

1. תהי K קבוצה כלשהי של השמות אמת על הפסוקים האטומיים $p_1,\dots,p_n$ (כלומר, K היא קבוצה של שורות בטבלת

הוכח שקיימת נוסחה פסוקית α כך ש $V(\alpha)=T$ אם ורק אם $V\in K$, וכן שב α מופיעים הקשרים $\{\neg,\wedge\}$ בלבד. (כלומר, הוכח ש $\{\neg,\wedge\}$ מהווה מערכת מספיקה)

2. התבונן בפסוקים:

i) $\underbrace{\forall x\, \exists y\, \forall z\;\; P(x,z)\to R(x,y,z)}_{\alpha}$

ii) $\underbrace{x\forall z\, \exists y\;\; P(x,z)\to R(x,y,z)}_{\beta}$

מצא אינטרפרטציות I_1, I_2, I_3, I_4 כך ש

$\alpha^{I_1}=T,\ \beta^{I_1}=T$; $\alpha^{I_2}=T,\ \beta^{I_2}=F$

$\alpha^{I_3}=F,\ \beta^{I_3}=T$; $\alpha^{I_4}=F,\ \beta^{I_4}=F$

(רמז: יתכן שלא כולן קיימות)

51

דף 2 מתוך 2

לוגי' דף

צ'כ חיפה

משנה 9'

סמ' 1C מועד 1C

3. i.

א) מצא את הסקולמיזציה α_s של הפסוק α משאלה 2.

ב) איך צריך להרחיב את האינטרפרטציה I_1 שניתנה כדי שתהיה מודל גם ל-α_s

ג) תאר את עולם ההרברנד ואת קבוצת הבסיס של α_s

ii. כנ"ל עבור β משאלה 2.

4. הוכח שקבוצת הפסוקיות (clauses) הבאה אינה ניתנת לסיפוק:

$$\{p(x,x), Q(F(x,z))\}, \{r(u,v), s(u,v,u), t(g(u))\},$$

$$\{\neg s(g(c), w, y)\}, \{\neg p(c,z_1), \neg t(g(g(z_1)))\}$$

$$\{\neg Q(F(c,b))\}, \{\neg r(g(x_1), b)\}$$

5. הוכח: אם לקבוצת הפסוקים Σ קיימים מודלים גדולים כרצוננו, אז יש ל-Σ מודל אינסופי. (רמז: הוכח שקבוצת הפסוקים $\Sigma \cup \{\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \ne x_j \mid n=1,2,\ldots\}$ ניתנת לסיפוק.)

לוגיקה מתמטית 88-200-01 ד"ר גיל קופל תשנ"ה סמ' ב' מועד ב

52

1. תהי α הפסוק $\forall x \exists y \exists z\, a(x,y,z) \wedge b(x,z) \rightarrow \neg b(x,y)$

א. מצא מודל ל α

ב. מצא אינטרפרטציה של השפה שאינה מודל ל α

ג. מצא את הסקולמיזציה α_s של α

ד. מצא מודל ל α_s

ה. מהו עולם הרברנד של α_s?

ו. מהו קבוצת האטום של α_s?

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

2. נסה אחד מהמשפטים הבאים:

א. משפט הרברנד ב. משפט לוונהיים-סקולם

יהיה T הטיעון הבא:

לכל מספר קיים מספר ~~~~ שהוא קטן ממנו.

אפס הוא מספר.

כל מספר חיובי אינו קטן מאפס.

לכן קיים מספר שאינו חיובי.

א. תרגם את T לשפה מסדר ראשון. השתמש בפרדיקטים number(x), positive(x), $x<y$ וקבוע 0.

ב. מצא פסוק אוניברסלי ~~~~ שאינו ניתן לסיפוק אם ורק אם T הוא תקף (השתמש בסקולמיזציה)

ג. השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש T הוא תקף

משך המבחן שעתיים וחצי!

בהצלחה

זמן הבחינה: שעתיים. בחינה בלוגיקה מתמטית 88-372 20.6.89

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות. סמסטר א' מועד ב'

53

1. להגדיר או לנסח:

א) נכונות באופן החלש והחזק של מערכת דדוקטיבית בשפה פסוקית.

ב) $\varphi(t/x)$ (תוצאת הצבה של t עבור x בנוסחה φ).

ג) תוצאה לוגית באופן החלש (רחב) והחזק (צר) בשפה מסדר ראשון.

2. לנמק בקצרה או להפריך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר L שפה כלשהי מסדר ראשון

א) כל נוסחה ב- L שקולה לוגית לנוסחה שבה המשתנה v_5 אינו חופשי.

ב) כל נוסחה ב- L שקולה לוגית לנוסחה שבה v_5 אינו קשור,

ג) אם לפסוק φ של L יש מודל סופי אזי יש ל- φ גם מודל אינסופי.

ד) אם לפסוק φ של L יש מודל אינסופי אזי יש ל- φ שני מודלים לא איזומורפיים.

3. נתונה השפה הפסוקית עם שני אטומים p, q והקשר $\sim$ בלבד. תהי S המערכת הדדוקטיבית ב- L שכלל ההיסק היחיד שלה הוא $\dfrac{\varphi}{\sim\sim\varphi}$.

א) הראה ש- S נכונה באופן החזק.

ב) האם S שלמה באופן החלש? ובאופן החזק?

ג) האם הוספת הכלל $\dfrac{\sim\sim\varphi}{\varphi}$ ל- S משנה את התשובות לשאלות הקודמות? אם כן, מה ההבדלים?

4. תהי L השפה מסדר ראשון עם הקשרים הלוגיים $\sim, \rightarrow, \forall, =$ וללא אף קבועים לא-לוגיים (כלומר ללא סמלי פונקציות ויחסים).

א) להוכיח שאם $\mathfrak{B}=\langle B\rangle$, $\mathfrak{A}=\langle A\rangle$ מודלים לשפה L, ו- $|A|=|B|$ (כלומר קיימת התאמה חח"ע בין הקבוצות A ו- B) אזי $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ שקולים אלמנטרית.

ב) להראות שכל שני מודלים אינסופיים לשפה L שקולים אלמנטרית.

[רמז: שימוש ב-(א) ובמשפט לוונהיים-סקולם היורד.]

מבחן בלוגיקה (מועד ב)

דף במועד ב
לוגיקה מתמטית
20.6.89

26

74

5. יהי L השפה שהוגדרה בשאלה 4. להוכיח שלא קיים פסוק φ של L כך שעבור כל מודל סופי $\mathfrak{A}=\langle A\rangle$ לשפה: φ אמיתי ב-$\mathfrak{A}$ אמם מספר איברי A זוגי.

[רמז: אם φ פסוק כזה מה אפשר לומר על קיום מודלים אינסופיים ל-φ ול-$\sim\varphi$?]

הערה: בפתרון תרגיל זה מותר להשתמש בתוצאות שאלה 4 גם אם לא פתרת אותה.

בהצלחה

[redacted] בבפד [redacted]

3ל 1 מועד 2

X

[redacted] .... סמסטר ב מועד ב׳ תשמ"ג .... ד׳ משה קורן

55

לכל אחת מהשאלות בחר תשובה אחת. תבדק את תשובתך.
אפשר להסתמך על כל המשפטים שלמדנו בכתה

1. טענה I: אם Σ היא קבוצה (סופית או לא-סופית) נתנת להכרעה של נוסחאות בלוגיקה פסוקית של הקבוצה $S=\{\alpha \mid \Sigma\models\alpha\}$ נתנת להכרעה

טענה II: אם Σ כנ"ל אז קיימת Σ_0 סופית כך ש $S=\{\alpha \mid \Sigma_0\models\alpha\}$

א) רק טענה I אמיתית ב) רק טענה II אמיתית
ג) שתי הטענות אמיתות ד) שתי הטענות שקריות

2. אמיתות הנוסחה $\forall x\{x=y\to\exists x[P(x,y)\wedge P(y,x)]\}$ תלויה
א) במבנה ובהשמה ב) רק במבנה ג) רק בהשמה
ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

3. I: קבוצת המבנים K היא EC. II: K ו-K̄ נתנת לאקסיומטיזציה סופית
א) I גורר II אבל II לא גורר I ב) II גורר I אבל I לא גורר II
ג) I אם ורק אם II ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

4. תהי N המספרים הטבעיים תהי · הכפלה תהי E הזוגיים ותהי P הראשוניים.
א) E נתנת להגדרת במבנה $\langle\cdot,N\rangle$ אבל P אינה נתנת להגדרה ב $\langle\cdot,N\rangle$
ב) P " E "
ג) E ו P נתנות להגדרה ב $\langle\cdot,N\rangle$ ד) E ו P אינן נתנות להגדרה ב $\langle\cdot,N\rangle$

5. תהי T תורה לא שלמה כך שכל המודלים של T בעוצמה $\aleph_0$ הם איזומורפים.
א) אז לT אין מודל סופי ב) אז לT יש מודל סופי אחד ויחיד
ג) אז לT יש יותר ממודל סופי אחד ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

56

דף במועד 2

לוגיקה מתמטית

סמ' ב' מועד א'

תשמ"ה

ד"ר משה קופל

המשך

6. תהי T תורה שלמה (בשפה L). תהי T קבוצה לא נתנת להכרעה.

תהי Σ תת-קבוצה נתנת להכרעה של T. אז

א) $C_n\Sigma$ אינה שלמה (בשפה L)

ב) $C_n\Sigma$ אינה נתנת להכרעה

ג) $C_n\Sigma$ נתנת להכרעה

ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

58

לוגיקה תשנ"ד מועד ג ד"ר משה קופל

1. לכל אחד מהטיעונים הבאים קבע אם הטיעון תקף. אם כן, הוכח.

א)
$$\begin{array}{l} A \to B \\ C \to B \\ \neg A \to C \\ \hline B \end{array}$$

ב)
$$\begin{array}{l} F \wedge (D \vee E) \\ F \to \neg(G \wedge E) \\ (H \wedge D) \to G \\ \neg H \to \neg F \\ \hline D \leftrightarrow G \end{array}$$

ג)
$$\begin{array}{l} \neg(J \to (K \to L)) \\ J \to (K \to M) \\ \hline P \to M \end{array}$$

ד)
$$\begin{array}{l} Q \to R \\ R \to S \\ S \to T \\ \hline T \to Q \end{array}$$

2. תרגם כל אחד מהטיעונים הבאים לסימנים.
(בונוס 5 נקודות [לא חובה] - קבע אם הטיעון תקף. הוכח.)

א) מדינת ישראל תישאר מדינה דמוקרטית רק אם תישמר הזכות להפגין. אולם אם הזכות להפגין תישמר ולממשלה יהיו הרבה מתנגדים, המונים יפגינו נגד הממשלה. אם המונים יפגינו נגד הממשלה תבוטל הזכות להפגין. אז מדינת ישראל תישאר מדינה דמוקרטית רק אם לממשלה לא יהיו הרבה מתנגדים.

ב) אם הקורס בלוגיקה לא יהיה קורס חובה אז או שקורס יותר גרוע יחליף אותו כקורס חובה או שהסטודנטים יעדיפו לבחור קורס בחירה נוסף. אם קורס יותר גרוע יחליף את הלוגיקה כקורס חובה אז הסטודנטים יתגעגעו ללוגיקה. אם הסטודנטים יעדיפו לבחור קורס בחירה נוסף כולם ילמדו לוגיקה. לכן אם הקורס בלוגיקה לא יהיה קורס חובה, אז או שהסטודנטים ילמדו לוגיקה בכל זאת או שיתגעגעו ללוגיקה.

בהצלחה!

~~Logic Exam~~ #2, p3
2 Jun

Time: 3 hours

1. (a) Let $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ and let s be a truth assignment on BKS(φ). Prove that $\bar{s}(\varphi) = T$ iff for all i in $\{1, \dots, n\}$ $\bar{s}(\varphi_i) = T$.

(b) Find how many different assignments on the Bloks $A_1, \dots A_n$ satisfy the following set of sentential formulas

$$\{\neg A_1 \vee A_2, \neg A_2 \vee A_3, \dots, \neg A_i \vee A_{i+1}, \dots, \neg A_{n-1} \vee A_n\}$$

(c) Prove that $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ is not complete.

2. (a) Let μ be the term $(x+y)$ (where x and y are distinct variables). Let τ_1 be the term $(x \cdot z)$, and τ_2 be the term z (a variable different from x and y). Then compute

$$\mu(x/\tau_1, y/\tau_2)$$

$$\mu(y/\tau_2, x/\tau_1)$$

(b) If φ is a formula in a first order logic language define

(i) φ is valid

(ii) φ is a tautology

(iii) $\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x)$ is a valid formula or is a tautology

(c) Show that

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$$

is a valid formula.

83 1 ממג2

31.1.89

61

88-372

בחינה בלוגיקה מתמטית

סימסטר א', מועד א'

זמן הבחינה: שעתיים.

נא לענות על שלוש מתוך 5 השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח:

א) תחביר של שפה פסוקית.

ב) מודל לשפה פסוקית L.

ג) מודל של קבוצת נוסחאות Γ בשפה L.

ד) משפט הקומפקטיות.

2. נתבונן בשפה פסוקית L עם קבוצת האטומים A ועם הקשרים $\vee, \wedge, \sim$ (בלבד). נגדיר לכל נוסחה φ את הנוסחה הדואלית $\tilde{\varphi}$ כדלקמן:

$$\tilde{p} = p \quad (p \in A),$$
$$\widetilde{\sim\varphi} = \sim\tilde{\varphi},$$
$$\widetilde{\varphi \wedge \psi} = \tilde{\varphi} \vee \tilde{\psi},$$
$$\widetilde{\varphi \vee \psi} = \tilde{\varphi} \wedge \tilde{\psi}.$$

לכל מודל μ לשפה L נתאים את $\tilde{\mu}$ את המודל המקיים $\tilde{\mu}(p) = 1 - \mu(p)$ לכל אטום p. [תזכורת: $F=0$; $T=1$.]

א) הוכח שלכל נוסחה φ ומודל μ:
$$\|\sim\varphi\|_\mu = \|\tilde{\varphi}\|_{\tilde{\mu}}.$$

ב) הסק מכאן שאם φ, ψ נוסחאות שקולות לוגית בשפה L אז גם $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ שקולות לוגית.

3. תהי $G: \{F,T\}^3 \to \{F,T\}$ פונקצית האמת המוגדרת כך:
$$G(F,x,y) = y, \quad G(T,x,y) = x$$
(לכל שני ערכי אמת x, y). נתבונן בשפה פסוקית L עם מספר סופי של אטומים ועם הקשרים $\underline{t}, \underline{f}, !$ ו c

דף 2 מתוך 2
לוגיקה מתמטית

[רמז לחלק (ד): היעזר במודל שבו כל האטומים אמיתיים או כולם שקריים.]

סמ' א' מועד א'
31.1.89.

62

4. מצא נוסחה פשוטה ביותר בצורה דיסיונקטיבית השקולה לוגית לנוסחה

$$\sim((p \to q) \wedge (q \to r)).$$

יש <u>להוכיח</u> שהנוסחה שמצאת היא מינימלית הן מבחינת מספר הדיסיונקטים שלה והן מבחינת מספר הקוניונקטים בכל דיסיונקט.

5. לנמק בקצרה או להפריך ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות:

א) אם L שפה פסוקית בעלת מספר סופי של אטומים, Γ קבוצת נוסחאות של L אז קיימת נוסחה φ בשפה L שהתוצאות הלוגיות שלה (ב-L) הן בדיוק התוצאות הלוגיות של Γ.

ב) כמו (א), בהשמטת ההנחה שמספר האטומים של L הוא סופי.

ג) אם A קבוצה סופית, R יחס סדר-חלקי על A ו- a איבר R-מינימלי של A (כלומר, לא קיים x ב-A כך ש- xRa) אז יש סידור ליניארי של A המרחיב את R ושבו a איבר ראשון.

ד) כמו (ג), בהשמטת ההנחה שהקבוצה A סופית.

בהצלחה