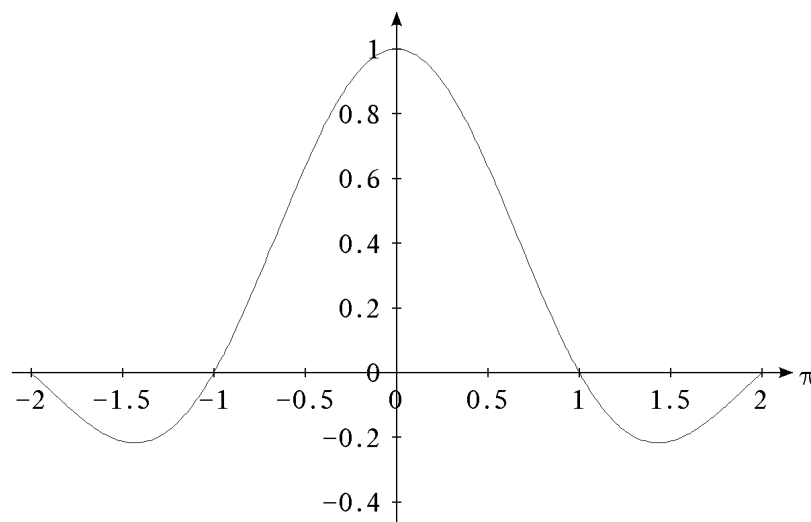


5 כאשר הפונקציה אינה מוגדרת בנקודת הגבול

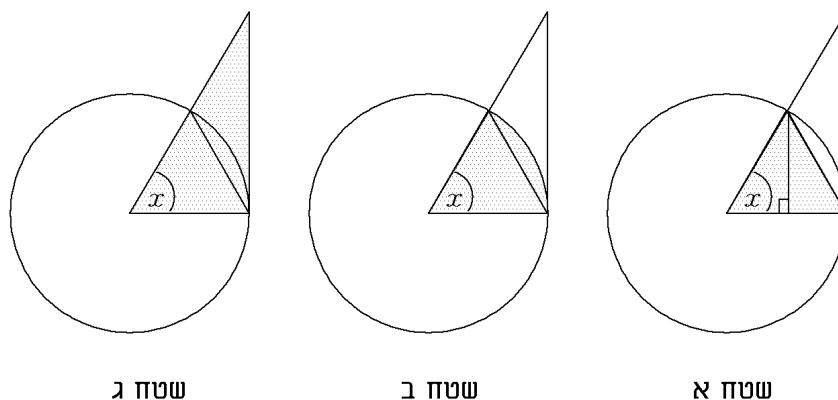
ברוב המשפטים שלנו, ובפרט במשפט האחרון, דרשנו שהפונקציה מוגדרת בנקודה שאליה x שואף. אולם ייתכן שגבול של פונקציה בנקודה מסויימת קיים, למרות שהפונקציה אינה מוגדרת באותה נקודה. נמחיש זאת בעזרת דוגמא מאלפת.

$$\text{משפט. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

הנה גרף הפונקציה $\frac{\sin x}{x}$:



הוכחה. ההוכחה היא משחק יפהפה של חישוב שטחים. כיון שהגבול הוא כאשר $x \rightarrow 0$, אפשר להניח $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. נתבונן במקרה $0 < x < \frac{\pi}{2}$. ניקח מעגל יחידה (כלומר מעגל רדיוסו 1) ונצבע בו שלושה שטחים.



כמובן, שטח א קטן משטח ב, שקטן משטח ג. מה מציינים השטחים?
 שטח א. כיון שזהו מעגל יחידה, הגובה של המשולש בשטח א הוא $\sin x$, ולכן שטח המשולש הוא $1 \cdot \sin x / 2 = \sin x / 2$.

שטח ב. כיון ששטחו של כל העיגול (האקרה $x = 2\pi$) הוא $\pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$, השטח של פלח שזוויתו x מקיים $S = x/2$, $S/\pi = x/2\pi$.

שטח ג. כיון שזהו מעגל יחידה, גובה המשולש הוא $\operatorname{tg} x$, ולכן שטחו $1 \cdot \operatorname{tg} x / 2 = \operatorname{tg} x / 2$.

קיבלנו איפוא, שמתקיים $\sin x / 2 < x / 2 < \operatorname{tg} x / 2$, לכן $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

אם נחלק את האי-שוויון $\sin x < x$ ב x נקבל $\sin x / x < 1$.

אם נכפול את האי-שוויון $x < \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ ב $\cos x / x$ נקבל $\cos x < \sin x / x$.

קיבלנו איפוא, שמתקיים

$$(*) \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

כאשר $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

נתבונן כעת במקרה $\frac{\pi}{2} < x < 0$. נסמן $y = -x$. אזי $0 < y < \frac{\pi}{2}$. $\sin y = \sin(-x) = -\sin x$, לכן $\sin y / y = -\sin x / (-x) = \sin x / x$. אבל $\cos y = \cos(-x) = \cos x$. מ $(*)$ נקבל $\cos y < \sin y / y < 1$, לכן גם במקרה זה מתקיים האי-שוויון $(*)$. לכן אי השוויון מתקיים לכל x השונה מ 0 ונמצא בקטע הפתוח $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ואפשר לקרוא לשוטרים, כלומר להפעיל את משפט הסנדביץ'.

כעת, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$, וכמובן $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, לכן ממשפט הסנדביץ', גם $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$, כמו שרצינו להוכיח. $\square$