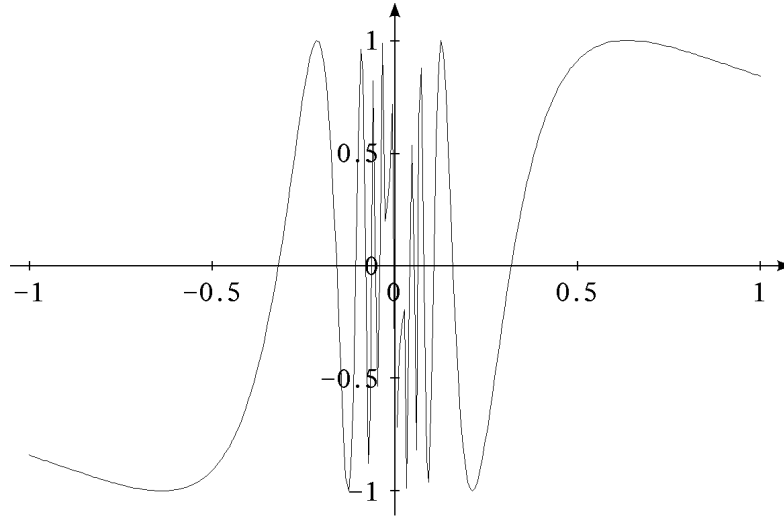


חדו"א 2 למדעי המחשב – תקציר שיעור שני

ד"ר בועז צבאן, מכון אינשטיין למתמטיקה

3 אי קיום גבול

הערה. לא תמיד הגבול של פונקציה בנקודה נתונה קיים. למשל, הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ אינו קיים.



גרף הפונקציה $\sin \frac{1}{x}$

(בשם רצולוציה נמוכה, הצורך אינו מדויק בקירוב אפס, גם שם הפונקציה מקבלת את הערכים ± 1)

הוכחה. נניח על דרך השלילה שהגבול קיים ונסמנו L , ונראה שמתקבלת מכך סתירה.

ניקח $n=1$. מהגדרת הגבול, קיים m כך שאם $0 < |x| = |x-0| < 10^{-m}$ אז $|\sin \frac{1}{x} - L| < 10^{-n} = \frac{1}{10}$.

נזכור שלכל k שלם, $\sin(\pi k + \frac{\pi}{2}) = 1$. אם ניקח $x = 1/(\pi k + \frac{\pi}{2})$ כאשר k מספיק גדול, יתקיים

$0 < |x| < 10^{-m}$ (תרגיל: מצא ערך מספיק גדול k כדי שהאמור δ יתקיים), לכן $|\sin \frac{1}{x} - L| < \frac{1}{10}$, אבל

מבחרתנו את x מתקיים $\sin \frac{1}{x} = 1$, לכן $1 - L < \frac{1}{10}$, כלומר $1 - \frac{1}{10} < L < 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$.

מאידך, לכל k שלם מתקיים $\sin(\pi k - \frac{\pi}{2}) = -1$, לכן אם ניקח $x = 1/(\pi k - \frac{\pi}{2})$ כאשר k מספיק גדול,

יתקיים $0 < |x| < 10^{-m}$, לכן $|\sin \frac{1}{x} - L| < \frac{1}{10}$, ומבחרתנו את x מתקיים $\sin \frac{1}{x} = -1$, לכן $-1 - L < \frac{1}{10}$, כלומר

$$-\frac{11}{10} = -1 - \frac{1}{10} < L < -1 + \frac{1}{10} = -\frac{9}{10}.$$

קיבלנו איפוא ש $\frac{9}{10} < L < -\frac{9}{10}$, סתירה. לכן לא קיים גבול כזה L . $\square$

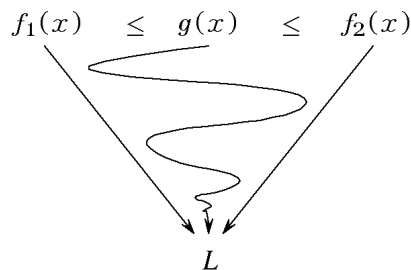
4 משפט הסנדביץ'

בכל אופן, יש מקרים שהפונקציה נראית מוזר כמו בדוגמא האחרונה, ובכל זאת הגבול קיים. לעתים

קרובות הוכחת קיום הגבול במקרים כאלה תיעזר במשפט הבא. יש המכנים את המשפט הבא "משפט שני השוטרים והשיכור", משום שאם שני שוטרים מחזיקים שיכור משני הצדדים ושניהם הולכים לאותו הכלא, אז גם השיכור יגיע לאותו הכלא ...

משפט הסנדביץ'. אם $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ לכל x (אספיק שזה נכון לכל x השונה מ x_0 באינסוף קטע פתוח (a, b) האכילס את x_0), ומתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L$, אז גם $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$.

בציור:



משפט הסנדביץ'

הוכחה. יהי נתון n טבעי. יש למצוא m טבעי כך שאם $0 < |x - x_0| < 10^{-m}$, אז $|g(x) - L| < 10^{-n}$.
 לכן יש m_1 טבעי כך שאם $0 < |x - x_0| < 10^{-m_1}$, אז $|f_1(x) - L| < 10^{-n}$ (ולכן $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = L$).
 וכן יש m_2 טבעי כך שאם $0 < |x - x_0| < 10^{-m_2}$, אז $|f_2(x) - L| < 10^{-n}$ (ולכן $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L$).
 ניקח $m = \max\{m_1, m_2\}$. נניח ש $0 < |x - x_0| < 10^{-m}$.
 לכן $L - 10^{-n} < f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x) < L + 10^{-n}$.
 לכן $|g(x) - L| < 10^{-n}$, כדרוש. □

מסקנה. אם $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, אז $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
הוכחה. $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. לכן $\lim_{x \rightarrow x_0} -|f(x)| = -0 = 0$ וממשפט הסנדביץ', גם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. □